Teorija OM — IŠRM 2024/25

Anton Luka Šijanec

27. avgust 2025

Povzetek

Povzeto po mojih zapiskih s predavanj profesorja Konvalinke.

Kazalo

1 Optimizacijski problemi **2**
1.1 Linearno programiranje . . . 3
1.1.1 Konveksna množica . . . 4
1.2 Simpleksna metoda . . . 5
1.3 Dvofazna simpleksna metoda . . . 8
1.4 Dualnost pri linearnem programiranju . . . 10
1.4.1 Motivacija . . . 10
1.5 Ekonomski pomen dualnih spremenljivk . . . 16
1.6 Dual splošnega LP . . . 17

2 Matrične igre **17**

3 Problem razvoza (angl. transshipment problem) **23**
3.1 Simpleksna metoda na omrežjih. . . . 24
3.2 Problem razvoza z omejitvami (PRO) . . . 26
3.2.1 Reševanje PRO s simpleksno metodo . . . 27

4 Pretoki in prerezi **28**
4.1 Algoritem za hitro reševanje naloge največjega prereza: Ford-Fulkerson (FF) . . . 29

5 Prirejanja in pokritja **30**
5.1 Madžarska metoda (MM) . . . 31
5.2 Madžarska metoda z utežmi (MMU) . . . 33

6 Najkrajše poti **35**
6.1 BFS . . . 35
6.2 Dijkstra . . . 35
6.3 Najkrajše poti v acikličnih grafih (DAG) — topološka ureditev . . . 36
6.4 Bellman-Fordov algoritem . . . 36
6.5 Floyd-Warshall . . . 36

7 Konveksna optimizacija **37**
7.1 Konveksni stožci in Farkaseva [farkaševa] lema. . . . 39

8 Konveksne funkcije **42**
8.1 Kriterija prvega in drugega odvoda . . . 44
8.2 Konveksne funkcije in optimizacija . . . 49
8.3 Vezani ekstrem z neenakostmi — VEN . . . 50
8.4 Karush-Kuhn-Tuckerjevi pogoji (KKT) za reševanje VEN: . . . 51

9 Celoštevilsko linearno programiranje — CLP (angl. Integer linear programming — ILP) 54
9.1 Razveji in omeji (angl. branch and bound) 55

1 Optimizacijski problemi

Radi bi našli min ali max (skupno rečeno opt) vrednost določene funkcije (kriterijska funkcija), ki slika v $\mathbb{R}$, na neki množici (dopustna množica dopustnih rešitev).

Zgled. Nekaj zgledov:

$f : [-1, 2] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^2 - 2x + 1$ Optimume najdemo z znanim postopkom: izračunamo odvod, preverimo stacionarne točke in krajišča.

$f : [0, 2] \times [1, 4] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5$ Optimume najdemo z znanim postopkom: izračunamo parcialni odvod, preverimo stacionarne točke in parametriziramo rob in najdemo ekstreme še na robu.

Kmetija ima 50 hektarov zemlje in goji pšenico, koruzo in krompir z naslednjimi lastnostmi:

poljščina	delovna sila [človek ura na hektar]	strošek [evro na hektar]	dobiček [evro na hektar]
pšenica	60	400	240
koruza	80	600	400
krompir	100	480	320

Tabela 1: Specifikacija problema kmetije

Na voljo imajo 5000 človek ur, 24000 evrov kapitala. Maksimizirajmo dobiček.

Naše spremenljivke so pšenica (x_1), koruza (x_2) in krompir (x_3). Nalogo rešimo s spodnjim optimizacijskim problemom — problemom linearnega programa/linearne optimizacije:

$$\begin{array}{lcccl} \max & 240x_1 & +400x_2 & +320x_3 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 50 \\ & 60x_1 & +80x_2 & +100x_3 & \leq 5000 \\ & 400x_1 & +600x_2 & +480x_3 & \leq 24000 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Jabolka Imamo $2n$ jabolk s težami $w_1, \ldots, w_{2n}$. Razporedi jih v dve košari, v vsako n jabolk, da je razlika tež čim manjša. Spremenljivke: $x_i \in \{-1, 1\}$ (-1 za levo, 1 za desno košaro) za $i \in \{1..2n\}$. Optimizacijski problem

$$\min \left| \sum_{i \in \{1..2n\}} w_i x_i \right| \quad \text{p.p.} \quad \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0$$

ni linearen program, ker kriterijska funkcija ni linearna v spremenljivkah.

Most Štiri osebe (Ana, Barbara, Cvetka in Darja) želijo prečkati most. Prečkata ga lahko največ dve osebi hkrati. Imajo le eno svetilko. Ana prečka most v eni minuti, Barbara v dveh, Cvetka v petih in Darja v desetih. Izračunaj minimalni potreben čas, v katerem lahko vse prečkajo most.

Nalogo rešimo z uteženim grafom stanj $G = (V, E)$, kjer so V možna stanja, E možni prehodi med stanji in uteži povezav porabljen čas za prehod med stanji. Stanje je oblike $\{0, 1\} \times 2^{\{A,B,C,D\}}$ in ponazarja, na kateri strani mostu je svetilka in katere osebe so na začetni strani mostu. Začetno stanje je $\underline{ABCD} - \emptyset$ (svetilka in vse osebe so na začetni strani mostu), ciljno pa $\emptyset - \underline{ABCD}$ (svetilka in vse osebe so na končni strani mostu). Utež povezave je izražena v minutah, potrebnih za prestavitev med stanji in predstavlja maksimum prehodnih časov oseb, ki prečkajo most. Da najdemo optimalno pot med začetnim in ciljnim stanjem, uporabimo Dijkstrov algoritem.

Plavalci Imamo šest plavalcev s podanimi časi po disciplinah

	prsno	hrbtno	delfin	prosto
1	65	73	63	57
2	67	70	65	58
3	68	72	69	55
4	67	75	70	59
5	71	69	75	57
6	69	71	66	59

Sestaviti želimo čimhitrejšo štafeto, torej vsaki disciplini želimo prirediti natanko enega plavalca, ki bo to plaval v tej disciplini, pri pogoju, da lahko plavalec plava v največ eni disciplini.

Izdelamo poln dvodelni graf $K_{4,6}$ z utežmi na povezavah, ki predstavljajo čas plavalca v disciplini. Iščemo popolno prirejanje iz X v Y. Vseh je $6^{\underline{4}}$. Iščemo tisto z najmanjšo vsoto — najcenejše popolno prirejanje iz X v Y. Problem rešimo z madžarsko metodo z utežmi.

TSP Problem potujočega trgovca. Podana je matrika z razdaljami med mesti:

	Ljubljana	London	Madrid	Pariz	Rim
Ljubljana	0	5	10	5	10
London	5	0	10	1	5
Madrid	10	10	0	5	5
Pariz	5	1	5	0	1
Rim	10	5	5	1	0

Navodilo: Iz Ljubljane obišči vsa mesta in se vrni v Ljubljano čim ceneje. Vsako mesto obišči točno enkrat. Rešitev: Izdelamo utežen polni graf z mesti za vozlišča in razdaljami med njimi za uteži na povezavah. Iščemo najcenejši Hamiltonov cikel. Za ta problem ne obstaja učinkovit algoritem.

Definicija. Optimizacijski problem je trojica (max/min, kriterijska oziroma ciljna funkcija f , dopustna množica oziroma množica dopustnih rešitev oziroma feasible set Ω). Iščemo optimalno rešitev $x^* \in \Omega \ni: \forall x \in \Omega : f(x^*) \geq f(x)$ oz. $f(x^*) \leq f(x)$. Optimalna vrednost je $f(x^*)$, kjer je x^* optimalna rešitev. „Rešiti optimizacijsko nalogo“ pomeni „poiskati optimalno rešitev“.

Optimizacijski problemi se delijo na:

- nedopustne: množica dopustnih rešitev je prazna. Primer: $(\max, x, x \leq 1 \wedge x \geq 2)$.
- dopustne: množica dopustnih rešitev ni prazna. Ti se dalje delijo na:
  - neomejene: f lahko doseže poljubno velike vrednosti. Primer: $(\max, x, x \geq 0)$.
  - neoptimalne: ni ustrezne rešitve, a problem ni neomejen: Primer: $(\max, x, x < 5)$ (opazi: strogo manjše).
  - optimalne: ima rešitev. Primer: $(\max, -x, x \geq 0)$ (optimalna rešitev je $x^* = 0$ z vrednostjo $f(0) = 0$).

1.1 Linearno programiranje

Definicija. Linearni program/LP je optimizacijski problem, pri katerem je f linearna funkcija in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi oblike $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \oplus b$, kjer je $\oplus \in \{\leq, \geq, =\}$ (ne pa tudi $<$ in $>$). Pravimo, da je LP v standardni obliki, če

- iščemo maksimum,
- Ω je podan s samimi $\leq$ (brez $=$,$\geq$) in
- za vse spremenljivke velja, da so nenegativne.

Torej LP v standardni obliki izgleda takole:

$$\begin{array}{lcccc}
\max & cx_1 & +\cdots+ & c_n x_n & \\
\text{p. p.} & a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & \leq b_m \\
 & x_1, & \cdots & x_m & \geq 0
\end{array}$$

Tipično je maksimizacija dobička LP v standardni obliki. Simpleksna metoda deluje na LP v standardni obliki.

Trditev. Vsak LP je ekvivalenten nekemu LP v standardni obliki.

Dokaz. Pretvorbe

- $\min f \mapsto \max -f$
- $a \geq b \mapsto -a \leq -b$
- $c = d \mapsto c \leq d \wedge d \leq c$
- $x_i \leq 0 \mapsto x_i' = -x_i, x_i' \geq 0$
- $x_j \lesseqqgtr 0 \mapsto x_j = x_j' - x_j'' \wedge x_j', x_j'' \geq 0$ — vsako število lahko izrazimo kot razliko dveh pozitivnih števil

ohranijo optimalne rešitve. □

Zgled. Oglejmo si pretvorbo danega LP v LP v standardni obliki:

$$\begin{array}{lcccc}
\min & 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & \\
\text{p. p.} & x_1 & +x_2 & & \leq 4 \\
 & 3x_1 & -x_2 & -x_3 & \geq 1 \\
 & 2x_2 & & +5x_3 & = -1 \\
 & x_1 \geq 0 & & \leq 0 &
\end{array}$$

Vpeljemo $x_3' := -x_3$ in $x_2 = x_2' - x_2''$ in popravimo neenakosti, enakosti in opt ter kriterijsko funkcijo po zgoraj opisanih pretvorbah. Dobimo

$$\begin{array}{lccccc}
\max & -2x_1 & +3x_2' & -3x_2'' & +x_3' & \\
\text{p. p.} & x_1 & +x_2' & -x_2'' & & \leq 4 \\
 & -3x_1 & +x_2' & -x_2'' & -x_3' & \leq -1 \\
 & & 2x_2' & -2x_2'' & +5x_3' & \leq -1 \\
 & & -2x_2' & +2x_2'' & -5x_3' & \leq 1 \\
 & x_1, & x_2', & x_2'', & x_3' & \geq 0
\end{array}$$

1.1.1 Konveksna množica

$x + (y - x) \cdot \lambda = (1 - \lambda) x + \lambda y$ je parametrizacija točk na $xy-$premici. Za $\lambda \in [0, 1]$ pa je to parametrizacija $xy-$daljice.

Definicija. $A \subseteq \mathbb{R}$ (ali poljuben vektroski prostor nad poljem $\mathbb{R}$) je konveksna, če velja $\forall a, b \in A, \lambda \in [0, 1] :$ $(1 - \lambda) x + \lambda y \in A$.

Dejstvo. *Za $A \subseteq \mathbb{R}$ se izkaže, da je A konveksna $\Leftrightarrow$ A je interval.*

Dejstvo. *Krogla R v $\mathbb{R}^n$ je konveksna, kajti*

$$||x||, ||y|| \leq R \Rightarrow ||(1-\lambda)x + \lambda y|| \leq ||(1-\lambda)x|| + ||\lambda y|| = |1-\lambda|\,||x|| + |\lambda|\,||y|| = (1-\lambda)\,||x|| + \lambda\,||y|| \leq (1-\lambda) R + \lambda R = R$$

Nadalje so v $\mathbb{R}^n$ konveksne še premica, ravnina in kocka.

Trditev. Vsak linearen podprostor v $\mathbb{R}^n$ je konveksen.

Dokaz. Če je $x, y \in V$, je $\lambda x + \mu y \in V$, torej tudi za $\lambda \in [0, 1]$ in $\mu = 1 - \lambda$. □

Trditev. $a + V$ je tudi konveksna za V podprostor. Naj bo $x, y \in V$.

Dokaz.

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in V \Rightarrow (1-\lambda)(x+a) + \lambda(y+a) = (1-\lambda)x + \lambda x + (1-\lambda)a + \lambda a = (1-\lambda)x + \lambda y + a \in V$$

□

Trditev. Polprostor je tudi konveksen.

Dokaz. Naj bo polprostor definiran z enačbo $H = \{x \subseteq V; a \cdot x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b\}$. Imejmo $x, y \in H$, se pravi velja

$$\text{I:}\quad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b \quad \text{in}$$

$$\text{II:}\quad a_1y_1 + \cdots + a_ny_n \leq b.$$

Naj bo $\lambda \in [0,1]$ in

$$(1-\lambda)x + \lambda y = \sum_{i=1}^{n}((1-\lambda)x_i + \lambda y_i) \qquad / \cdot a$$

$$a((1-\lambda)x + \lambda y) = \sum_{i=1}^{n} a_i((1-\lambda)x_i + \lambda y_i) = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_iy_i \overset{\text{po I. in II.}}{\leq} \lambda b + (1-\lambda)b = b,$$

torej skupaj $(1-\lambda)x + \lambda y \leq b$ — polprostor je konveksen. □

Definicija. Pravimo takole: $\lambda x + \mu y$ je linearna kombinacija, $\lambda x + \mu y$ ob $x + y = 1$ je afina kombinacija, $\lambda x + \mu y$ ob $\lambda, \mu \geq 0 \wedge \lambda + \mu = 1$ je konveksna kombinacija, $\lambda x + \mu y$ ob $\lambda, \mu \geq 0$ pa je nenegativna kombinacija.

Trditev. Za A, B konveksni je $A \cap B$ konveksna in za $\{A_i; i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ je $\bigcap_{i \in I} A_i$ konveksna.

Dokaz. Naj bosta $x, y \in \bigcap_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} A_i$ in $\lambda \in [0,1]$. Velja $\forall i \in I : (1-\lambda)x + \lambda y \in A_i$, ker je A_i konveksna in ker sta x, y v A_i zaradi lastnosti preseka. □

Opomba. Unija ni nujno konveksna.

Trditev. Naj bo P LP. Velja Ω konveksna in množica optimalnih rešitev $\Omega^* = \{x^* : x^* \text{ optimalna rešitev}\}$ konveksna.

Dokaz. Ω je presek polprostorov, torej je konveksen. Če je $\Omega^* = \emptyset$, je konveksen, sicer pa

$$\exists x^* \in \Omega^* \ni: \Omega^* = \{x \in \Omega; f(x) = f(x^*)\} = \Omega \cap \{x \text{ poljuben}; f(x) = f(x^*)\}$$

in Ω je konveksen, $\{x \text{ poljuben}; f(x) = f(x^*)\}$ pa je hiperravnina (ker je f linearna je izraz $f(x) = f(x^*)$ oblike $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c$) in zato konveksna. Njun presek je po prejšnji trditvi tudi sam konveksen. □

Linearne programe z dvema spremenljivkama lahko rešujemo grafično. Pogoji so premice, ki razsekajo prostor in omejijo množico rešitev, kriterijska funkcija pa določa vektor, ki kaže proti optimalni vrednosti.

1.2 Simpleksna metoda

Definicija. LP v std. obliki

$$\begin{array}{lcccc} \max & c_1x_1 & + \cdots + & c_nx_n & \\ \text{p. p.} & a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & \leq b_m \\ & x_1, & \ldots & x_n & \geq 0 \end{array}$$

lahko zapišemo v matrični obliki kot

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad A = [a_{ij}]_{i \in \{1..m\}, j \in \{1..n\}} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \max c^T x \quad \text{p. p.} \quad Ax \leq b, x \geq 0.$$

Orodje za reševanje LPVSO je simpleksna metoda. Naj bo P LPVSO.

1. Delimo vse enačbe z največjim skupnim deliteljem. Za primer kmetije od prej:

$$\begin{array}{lcccl} \max & 3x_1 & +5x_2 & +4x_3 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 50 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +5x_3 & \leq 250 \\ & 10x_1 & +15x_2 & +12x_3 & \leq 600 \\ & x_1, & x_{2,} & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

2. Napišemo prvi slovar: To so vpeljane dopolnilne spremenljivke. Toliko jih je, kolikor je omejitev:

$$x_{n+1} \coloneqq b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_{n+m} \coloneqq b_m - a_{m1}x_1 - \cdots - a_{mn}x_n$$

Za zgornji primer je prvi slovar

$$x_4 = 50 - x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_5 = 250 - 5x_3 - 4x_2 - 3x_1$$

$$x_6 = 600 - 10x_1 - 15x_2 - 12x_3$$

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \quad \text{(funkcija, ki jo maksimiziramo)}$$

Dobimo slovar z $m + 1$ enačbami: m baznih spremenljivk in spremenljivka z so izražene s preostalimi n nebaznimi spremenljivkami. Prvi slovar so dopolnilne spremenljivke, izražene s prvotnimi, torej dopolnilne so bazne, prvotne pa nebazne.

Pravimo, da je slovar dopusten $\Leftrightarrow$ konstantni koeficienti pri vseh baznih spremenljivkah so nenegativni (v primeru so to $\{50, 250, 600\}$), kar pri prvem slovarju pomeni $\forall i : b_i \geq 0$. Če $\cancel{\forall i : b_i \geq 0}$, uporabimo dvofazno simpleksno metodo (kasneje). Zaenkrat predpostavimo dopustnost.

V simpleksni metodi tudi za dopolnilne spremenljivke velja, da so vselej nenegativne.

3. Če je slovar dopusten, nam daje bazno dopustno rešitev: vse nebazne spremenljivke postavimo na 0. Sedaj želimo povečati z. Izberemo nebazno spremenljivko s pozitivnim koeficientom v kriterijski funkciji z. Rečemo ji vstopna spremenljivka. Vzamemo tisto bazno spremenljivko, ki nam zapoveduje najnižno zgornjo mejo za vstopno spremenljivko ZDB izberemo tisto, ki nas najbolj omejuje, ko želimo vstopno spremenljivko čim bolj povečati. Tej pravimo izstopna spremenljivka (x_0). Nastavimo vhodno spremenljivko na to zgornjo mejo. Tedaj je $x_0 = 0$. Zamenjamo vlogo x_0 in vstopne spremenljivke (tako da izrazimo vstopno — sedaj vstopna postane bazna spremenljivka) in postopek nadaljujemo.

Vprašanje. *Katero kandidatko za vstopno spremenljivko izberemo? Vseeno je. Lahko recimo izberemo*

- *tisto z najmanjšim indeksom,*
- *tisto z največjim koeficientom v z (v praksi nekoliko hitrejše računanje) ali pa*
- *tisto, kjer lahko z največ povečamo upoštevaje omejitve in koeficiente (pravilo največjega povečanja).*

Vsaka bazna spremenljivka nam pove, za koliko se lahko poveča vstopna spremenljivka. Za izstopno spremenljivko (x_0) izberemo tisto, ki vstopno najbolj omejuje. Vrstici v bazi s to spremenljivko pravimo „pivotna vrstica“.

Če je koeficient vstopne spremenljivke pri kakšni bazni spremenljivki ≥ 0, nam to ne daje omejitve za vstopno spremenljivko oziroma $x_i \leq \infty$.

Če nam nobena bazna spremenljivka v nekem trenutku ne omejuje vstopne spremenljivke, je problem neomejen — končamo.

Degeneriran korak simpleksne metode: lahko se zgodi, da je ena od omejitev $x_i \leq 0$. V tem primeru se vrednost kriterijske funkcije ne poveča.

V pivotni vrstici vstopno spremenljivko izrazimo z ostalimi nebaznimi spremenljivkami in izraženo vstopno spremenljivko vstavimo v vse ostale vrstice slovarja.

V našem primeru naj bo x_2 vstopna. Baza nam poda naslednje omejitve: $x_2 \leq 50$, $x_2 \leq \frac{250}{4}$, $x_2 \leq \frac{600}{15} = 40$ (slednje najbolj navzdol omeji x_2, zato bo tretja vrstica baze pivotna in x_6 vzamemo kot izstopno spremenljivko). Takole preuredimo pivotno vrstico, da izrazimo x_2:

$$x_6 = 600 - 10x_1 - 15\underline{x_2} - 12x_3$$

$$15x_2 = 600 - 10x_1 - 12x_3 - x_6 \quad / : 15$$

$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6$$

Nato to izražavo x_2 vstavimo v prvi slovar:

$$x_4 = 50 - x_1 - \left(40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6\right) - x_3$$

$$x_5 = 250 - 3x_1 - 4\left(40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6\right) - 5x_3$$

$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6$$

$$z = 3x_1 + 5\left(40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6\right) + 4x_3$$

In po pokrajšanju iz tega dobimo drugi slovar:

$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6$$

$$x_4 = 10 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{15}x_6$$

$$x_5 = 90 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{15}x_6$$

$$z = 200 - \frac{1}{3}x_1 + 0x_3 - \frac{1}{3}x_6 = 200 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_6$$

4. Ko v z v slovarju naposled ni več nobene spremenljivke s pozitivnim koeficientom, smo končali — našli optimalno rešitev. Spremenljivke, ki ostanejo v z in imajo negativen koeficient, nastavimo na 0. Tiste, ki imajo v z ničelni koeficient (= jih ni v z), vzamemo kot parametre rešitve. Optimalna vrednost je nato vrednost z (prosti koeficient brez spremenljivke). V našem primeru:

$$x_1^* = 0, \quad x_6^* = 0, \quad x_3^* = t, \quad z^* = 200, \quad x_2^* = 40 - \frac{4}{5}t, \quad x_4^* = 10 - \frac{1}{5}t, \quad x_5^* = 90 - \frac{9}{5}t$$

Meje za parametre dobimo tako, da upoštevamo, da morajo biti vse spremenljivke pozitivne. V našem primeru

$$x_2^* = 40 - \frac{4}{5}t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50 \qquad x_5^* = 90 - \frac{9}{5}t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50 \qquad x_3^* = t \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \qquad \Longrightarrow t \in [0, 50]$$

Konkretno rešitev najdemo tako, da fiksiramo parametre v njihovih mejah. Recimo v našem primeru $t = 0$. Tedaj $x_1^* = 0$, $x_2^* = 40$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 10$, $x_5^* = 90$, $x_6 = 0$. Torej je ena veljavna rešitev posejati samo 40 hektarov koruze in nobenih drugih poljščin.

Optimalne vrednosti baznih spremenljivk nam povedo, koliko bi še lahko zmanjšali množico dopustnih rešitev oziroma vrednosti b_i, da bi še vedno našli dano fiksirano rešitev. V tem primeru za $t = 0$ dobimo $x_4^* = 10$, $x_5^* = 90$, $x_6^* = 0$. Toda pozor, enačbe smo delili z največjim skupnim deliteljem. Če to razveljavimo (dobljene vrednosti množimo s tem istim deliteljem), dobimo $x_4^{*\prime} = 10 \cdot 1 = 10$, $x_5^{*\prime} = 90 \cdot 20 = 1800$, $x_6^{*\prime} = 0 \cdot 40 = 0$. To pomeni, da kmetiji ostane še 10 hektarov neobdelane zemlje in 1800 človek ur delovne sile, sredstev pa jim ne ostane več nič.

Optimalno vrednost kriterijske funkcije dobimo tako, da vzamemo končen z in razveljavimo morebitno deljenje iz začetka postopka reševanja. V tem primeru smo delili z 80, torej je končna optimalna vrednost $z^{*\prime} = 200 \cdot 80 = 16000$ evrov dobička.

Dejstvo. *Ali se simpleksna metoda zagotovo ustavi? Ne. A vendar je slovarjev končno mnogo –* $\binom{m+n}{n}$*, torej se simpleksna metoda lahko zacikla v ciklu samih degeneriranih korakov. Ciklanje je izjemno redek pojav, ki se mu lahko izognemo.*

Izrek. *Če uporabljamo pravilo najmanjšega indeksa za vstopne in izstopne spremenljivke, do ciklanja ne pride.*

Dokaz. Ne bomo dokazali. □

Dejstvo. *Časovna zahtevnost simpleksne metode je nepolinomska. Oglejmo si primer (Klee-Minty):*

$$\begin{array}{lllll}
\max & 100x_1 & +10x_2 & +x_3 & \\
 & x_1 & & & \leq 1 \\
 & 20x_1 & +20x_2 & +x_3 & \leq 10000 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

Z metodo največjega koeficienta bomo za reševanje tega LPVSO potrebovali 7 korakov oziroma v splošnem $2^n - 1$*. Če pa že takoj za vstopno spremenljivko izberemo* x_1*, pa bomo potrebovali le en korak.*

Torej: v teoriji je simpleksna metoda lahko počasna, v praksi pa je zelo učinkovita in hitra (občasno $m \log n$*).*

Obstajajo tudi dokazljivo polinomske metode (recimo elipsoidna metoda ali metoda notranjih točk) za reševanje linearnih programov — linearno programiranje je v skupini problemov P.

Geometrijsko simpleksna metoda izgleda kot sprehajanje po ogliščih poliedra, dokler ne pridemo do maksimuma.

Vprašanje. *Kaj pa, če* $\cancel{\forall i : b_i \geq 0}$*? Oglejmo si primer. Imejmo dva tipa vitaminskih tablet – Polivit in Oligovit – in tri vitamine, B, C in D.*

	Vitamin B	Vitamin C	Vitamin D	cena na tableto
Polivit	1	4	1	12
Oligovit	1	1	2	10
dnevna potreba	7	13	8	

Tabela 2: Vitaminske tablete

Čim ceneje želimo potešiti dnevno potrebo po vitaminih. To lahko izrazimo z naslednjim linearnih programom:

$$\begin{array}{llll}
\min & 12x_1 & +10x_2 & \\
p.\ p. & x_1 & +x_2 & \geq 7 \\
 & 4x_1 & +x_2 & \geq 13 \\
 & x_1 & +2x_2 & \geq 8 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Prepišimo ga v standardno obliko:

$$\begin{array}{llll}
\max & -12x_1 & -10x_2 & \\
p.\ p. & -x_1 & -x_2 & \leq -7 \\
 & -4x_1 & -x_2 & \leq -13 \\
 & -x_1 & -2x_2 & \leq -8 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

Problema z doslej znano enofazno simpleksno metodo ne moremo rešiti, ker $\cancel{\forall i : b_i \geq 0}$*. Lahko ga rešimo z dvofazno simpleksno metodo.*

1.3 Dvofazna simpleksna metoda

1. Prva faza: Preverimo dopustnost. Ker b_i ni nujno ≥ 0, $x_1 = \cdots = x_n = 0$ ni več dopustna rešitev. Rešimo LP

$$\begin{array}{lllll}
 & \min & x_0 & & \\
 & \text{p. p.} & a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & \leq b_1 + x_0 \\
 & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & \leq b_m + x_0 \\
x_0, & & x_1, & \ldots & x_n & \geq 0
\end{array}$$

Tak problem je gotovo dopusten (recimo $x_1 = \cdots = x_n = 0$ za nek $x_0 \geq 0$) in gotovo ni neomejen, ker iščemo min navzdol omejene kriterijske funkcije x_0. Velja: optimalna vrednosti tega problema je $0 \iff$ prvotni problem je dopusten. Prvi slovar tega LP ni dopusten niti ne obstaja kandidatka za vhodno spremenljivko in se glasi

$$x_{n+1} = b_1 + x_0 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_{n+m} = b_m + x_0 - a_{m1}x_1 - \cdots - a_{mn}x_n$$

$$w = -x_0.$$

Čeprav ima negativen predznak, za vstopno spremenljivko vedno izberemo x_0. Povečujemo x_0, dokler ne dobimo dopustnega slovarja. Spomni se, da so b_i lahko negativne. Prva spremenljivka pove, da mora biti x_0 vsaj $-b_1$, ..., $m-$ta, da mora biti x_0 vsaj $-b_m$. Tista, ki najbolj omejuje x_0 (tista, ki zahteva, da je največji), naj bo izstopna spremenljivka oziroma pivotna vrstica.

Kot v običajni metodi zamenjamo vlogo vstopne x_0 in izstopne x_i in dobimo drugi slovar, ki je vedno dopusten (če kadarkoli pridemo do nedopustnega slovarja, smo se zmotili, recimo izbrali napačno izstopno spremenljivko).

Sedaj problem rešujmo dalje kot pri navadni simpleksni metodi — izbiramo vstopne spremenljivke iz kriterijske funkcije w, vse dokler iz baze zopet ne izstopi x_0 — takrat dobimo $w = -x_0$.

V prvi fazi torej:

- Če najdemo optimalno vrednost, ki je strogo manjša od 0 — x_0 je še vedno bazna spremenljivka $\Rightarrow$ prvotni primer je nedopusten.
- Če x_0 zapusti bazo in je optimalna vrednost 0 $\Rightarrow$ nadaljujemo z drugo fazo.
- Če pridemo do zadnjega slovarja, optimalna vrednost je 0, toda x_0 je še vedno bazna spremenljivka. $\Rightarrow$ Temu se izognemo in to tako, da če je x_0 kandidatka za vstopno spremenljivko, jo vedno izberemo.

2. Ko dobimo optimalno rešitev LP prve faze ($x_0^* = 0$, ...), smo našli eno dopustno rešitev prvotnega problema. Iz zadnjega slovarja prve faze izbrišimo x_0 in dobimo prvi slovar druge faze. Kriterijska funkcija je v drugi fazi kriterijska funkcija prvotnega problema, le da morebitne bazne spremenljivke, ki se pojavljajo v njej, zamenjamo z njihovimi vrednostmi iz slovarja. Drugo fazo rešujemo kot navadno simpleksno metodo. Rešitev, ki jo dobimo, je optimalna rešitev prvotnega problema.

S tem znanjem sedaj rešimo problem iz primera zgoraj:

1. Prva faza:

$$\begin{array}{lllll} \text{min} & x_0 & & & \\ \text{p. p.} & -x_1 & -x_2 & \leq -7 + x_0 \\ & -4x_1 & -x_2 & \leq -13 + x_0 \\ & -x_1 & -2x_2 & \leq -8 + x_0 \\ x_0, & x_1, & x_2, & \geq 0 \end{array}$$

Prvi slovar prve faze:

$$x_3 = -7 + x_0 + x_1 + x_2$$

$$x_4 = -13 + x_0 + 4x_1 + x_2$$

$$x_5 = -8 + x_0 + x_1 + 2x_2$$

$$w = -x_0$$

Prva vrstica pove, da mora biti $x_0 \geq 7$, druga pove, da mora biti $x_0 \geq 13$, tretja pa pove, da mora biti $x_0 \geq 8$. Druga vrstica nas najbolj omejuje, zato za izstopno spremenljivko izberemo x_4 in izrazimo x_0, da vstopi v bazo.

$$x_0 = 13 - 4x_1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = -7 + 13 - 4x_1 - x_2 + x_4 + x_1 + x_2 = 6 - 3x_1 + x_4$$

$$x_5 = -8 + 13 - 4x_1 - x_2 + x_4 + x_1 + 2x_2 = 5 - 3x_1 + x_2 + x_4$$

$$w = -13 + 4x_1 + x_2 - x_4$$

Vzemimo vstopno spremenljivko x_2. Preverimo omejitve za izstopno spremenljivko: $x_2 \leq 13$, $x_2 \leq \infty$, $x_2 \leq \infty$ $\implies$ izstopna spremenljivka bo x_0:

$$x_2 = 13 - x_0 - 4x_1 + x_4$$

$$x_3 = 6 - 3x_1 + x_4$$

$$x_5 = 5 - 3x_1 + 13 - x_0 - 4x_1 + x_4 + x_4 = 18 - x_0 - 7x_1 + 2x_4$$

$$w = -13 + 4x_1 + 13 - x_0 - 4x_1 + x_4 - x_4 = -x_0$$

Dobimo optimalno rešitev: $x_0 = 0$, $x_1 = t$, $x_2 = 13 - 4t + u$. Ena ustrezna je $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 13$ (nastavimo $t = u = 0$ in preverimo, da se izide).

2. Prvi slovar druge faze je potemtakem

$$x_2 = 13 - 4x_1 + x_4$$

$$x_3 = 6 - 3x_1 + x_4$$

$$x_5 = 18 - 7x_1 + 2x_4$$

$$z = -12x_1 - 10x_2 = -12x_1 - 10\,(13 - 4x_1 + x_4) = -12x_1 - 130 + 40x_1 - 10x_4 = -130 + 28x_1 - 10x_4$$

Vstopna spremenljivka je x_1, ki jo bazne omejujejo sledeče: $x_1 \leq \frac{13}{4}$, $x_1 \leq \frac{6}{3} = 2$ (ta jo najbolj), $x_1 \leq \frac{18}{7}$. Pivotna vrstica je torej druga — vstopna spremenljivka je x_3.

$$x_1 = \frac{6}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

$$x_2 = 13 - 4\left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right) + x_4 = 5 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 + x_4 = 5 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

$$x_5 = 18 - 7\left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right) + 2x_4 = 4 + \frac{7}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 + 2x_4 = 4 + \frac{7}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$$

$$z = -130 + 28\left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right) - 10x_4 = -130 + 56 - \frac{28}{3}x_3 + \frac{28}{3}x_4 - 10x_4 = -74 - \frac{28}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4$$

Končamo, ker ima z le negativne koeficiente — zadnji slovar. Dobimo rešitev $x_1^* = 2, \quad x_2^* = 5, \quad z^* = 74$.

Linearni problemi se torej delijo takole:

1. $\cancel{\forall i : b_i \geq 0}$: uporabimo dvofazno simpleksno metodo.
   (a) Prva faza ima $w^* < 0$: problem je nedopusten
   (b) Prva faza ima $w^* = 0$: problem je dopusten — reši drugo fazo kot po točki 2 tega seznama
2. $\forall i : b_i \geq 0$: dopusten
   (a) v nekem trenutku ni kandidatke za izstopno spremenljivko: problem je neomejen
   (b) pridemo do optimalne rešitve

1.4 Dualnost pri linearnem programiranju

1.4.1 Motivacija

Denimo, da imamo linearen program $\max c^T x$ p. p. $Ax \leq b$, $x \geq 0$ in njegovo optimalno rešitev x^* z optimalno vrednostjo $c^T x^*$ in želimo nekomu dokazati, da je rešitev res optimalna. Brez škode za splošnost se zaenkrat osredotočamo na LPVSO, vendar analogno velja za vse LP.

Vsako neenačbo lahko množimo z nekim nenegativnim y_i — $i-$to neenačbo torej množimo z y_i. Če zagotovimo (beri najdemo take $y_i \geq 0$), da $\forall j \in \{1..n\} : \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j$, bo, ko seštejemo vse neenačbe, leva stran večja ali enaka kriterijski funkciji, desna stran pa neki vrednosti $b^T y$. Super, našli smo zgornjo mejo za kriterijsko funkcijo — velja $c^T x \leq b^T y$. Sedaj je cilj poiskati najmanjšo zgornjo mejo $b^T y$ s pravilno izbiro y. Če bomo našli tako, da bo $b^T y = c^T x^*$ (izkazalo se bo, da je za optimalne LP ta najmanjša zgornja meja ravno optimalna vrednost), smo na konju — dokaz optimalnosti vrednosti $c^T x^*$ je tedaj ravno y.

Kako pa bi tak y lahko našli? Iščemo $\min b^T y$ pri pogojih $A^T y \geq c \wedge y \geq 0$. To pa je zopet linearen program! Torej naš dokaz lahko (če se navežemo na dejstvo iz prihodnosti, da za optimalne LP vedno velja $\exists y \ni: b^T y = c^T x^*$) najdemo z reševanjem še enega linearnega programa. Temu linearnemu programu pravimo dual — če je izvirni program P, je ta nov program „dual $P-$ju“; označimo ga s P'.

Zgled. Oglejmo si okrajšan dualni progam kmetije — imenujmo ga P:

$$
\begin{array}{lcccll}
\max & 3x_1 & +5x_2 & +4x_3 & & \\
\text{p. p.} & x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 50 & / \cdot y_1 \geq 0 \\
& 3x_1 & +4x_2 & +5x_3 & \leq 250 & / \cdot y_2 \geq 0 \\
& 10x_1 & +15x_2 & +12x_3 & \leq 600 & / \cdot y_3 \geq 0 \\
& x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Radi bi našli zgornjo mejo za kriterijsko funkcijo. Množimo enačbe z nenegativnimi koeficienti in seštejemo

$$(y_1 + 3y_2 + 10y_3)\, x_1 + (y_1 + 4y_2 + 15y_3)\, x_2 + (y_1 + 5y_2 + 12y_3)\, x_3 \leq 50y_1 + 250y_2 + 600y_3$$

Če veljajo pogoji

$$y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 3 \qquad \wedge \qquad y_1 + 4y_2 + 15y_3 \geq 5 \qquad \wedge \qquad y_1 + 5y_2 + 12y_3 \geq 4,$$

potem velja $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 50y_1 + 250y_2 + 600y_3$.

Problemu P dualni problem P':

$$
\begin{array}{lccccl}
\min & 50y_1 & +250y_2 & +600y_3 & \\
\text{p. p.} & y_1 & +3y_2 & +10y_3 & \geq 3 \\
& y_1 & +4y_2 & +15y_3 & \geq 5 \\
& y_1 & +5y_2 & +12y_3 & \geq 4 \\
& y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Rešimo ga. Prestavimo ga v standardno obliko:

$$
\begin{array}{lccccl}
\max & -50y_1 & -250y_2 & -600y_3 & \\
\text{p. p.} & -y_1 & -3y_2 & -10y_3 & \leq -3 \\
& -y_1 & -4y_2 & -15y_3 & \leq -5 \\
& -y_1 & -5y_2 & -12y_3 & \leq -4 \\
& y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Prvi slovar prve faze:

$$y_4 = -3 + y_0 + y_1 + 3y_2 + 10y_3$$

$$y_5 = -5 + y_0 + y_1 + 4y_2 + 15y_3$$

$$y_6 = -4 + y_0 + y_1 + 5y_2 + 12y_3$$

$$w = -y_0$$

Vstopi y_0. Omejitve: $y_0 \geq 3$, $y_0 \geq 5$, $y_0 \geq 4$. Pivotna je druga vrstica — izstopi y_5:

$$y_0 = 5 - y_1 - 4y_2 - 15y_3 + y_5$$

$$y_4 = -3 + 5 - y_1 - 4y_2 - 15y_3 + y_5 + y_1 + 3y_2 + 10y_3 = 2 - y_2 - 5y_3 + y_5$$

$$y_6 = -4 + 5 - y_1 - 4y_2 - 15y_3 + y_5 + y_1 + 5y_2 + 12y_3 = 1 + y_2 - 3y_3 + y_5$$

$$w = -5 + y_1 + 4y_2 + 15y_3 - y_5$$

Vstopi y_1. Omejitve: $y_1 \leq 5$, $y_1 \leq 2$, $y_1 \leq \infty$. Pivotna je prva vrstica — izstopi y_0:

$$y_1 = 5 - y_0 - 4y_2 - 15y_3 + y_5$$

$$y_4 = 2 - y_2 - 5y_3 + y_5$$

$$y_6 = 1 + y_2 - 3y_3 + y_5$$

$$w = -5 + 5 - y_0 - 4y_2 - 15y_3 + y_5 + 4y_2 + 15y_3 - y_5 = -y_0$$

Prva faza končana. Prvi slovar druge faze:

$$y_1 = 5 - 4y_2 - 15y_3 + y_5$$

$$y_4 = 2 - y_2 - 5y_3 + y_5$$

$$y_6 = 1 + y_2 - 3y_3 + y_5$$

$$z = -50y_1 - 250y_2 - 600y_3 = -50\left(5 - 4y_2 - 15y_3 + y_5\right) - 250y_2 - 600y_3 = -250 + 200y_2 + 750y_3 - 50y_5 - 250y_2 - 600y_3 =$$

$$= -250 - 50y_2 + 150y_3 - 50y_5$$

Vstopi y_3. Omejitve so sledeče: $y_3 \leq \frac{5}{15}$, $y_3 \leq \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, $y_3 \leq \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$. Pivotna spremenljivka je torej prva — izstopi y_1.

$$y_3 = \frac{5}{15} - \frac{1}{15}y_1 - \frac{4}{15}y_2 + \frac{1}{15}y_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}y_1 - \frac{4}{15}y_2 + \frac{1}{15}y_5$$

$$y_4 = 2 - y_2 - 5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}y_1 - \frac{4}{15}y_2 + \frac{1}{15}y_5\right) + y_5 = 2 - y_2 - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_5 + y_5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_5$$

$$y_6 = 1 + y_2 - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}y_1 - \frac{4}{15}y_2 + \frac{1}{15}y_5\right) + y_5 = 1 + y_2 - 1 + \frac{1}{5}y_1 + \frac{4}{5}y_2 - \frac{1}{5}y_5 + y_5 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{9}{5}y_2 + \frac{4}{5}y_5$$

$$z = -250 - 50y_2 + 150\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}y_1 - \frac{4}{15}y_2 + \frac{1}{15}y_5\right) - 50y_5 = -250 - 50y_2 + 50 - \frac{150}{15}y_1 - \frac{600}{15}y_2 + \frac{150}{15}y_5 - 50y_5 =$$

$$= -200 - 10y_1 - 90y_2 - 40y_5$$

Končamo. $z^* = 200$ (spremenimo predznak ker smo, če se spomnimo, „standardizirali“ problem na začetku reševanja). $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = \frac{1}{3}$, $y_4^* = \frac{1}{3}$, $y_5^* = 0$, $y_6^* = 0$.

Vsaka dopustna rešitev dualnega problema nam da zgornjo mejo za rešitev prvotnega problema. min kriterijske funkcije duala nam da najmanjšo zgornjo mejo prvotnega problema.

Zgled. Naj bo P: $\max c^T x$ p. p. $Ax \leq b \wedge x \geq 0$. Tedaj je $P-$ju dualni program P': $\min b^T y$ p. p. $A^T y \geq c \wedge y \geq 0$. Dualnih spremenljivk je toliko, kolikor je neenačb v prvotnem problemu.

Alternativni zapis: Naj bo P: $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ p. p. $\forall j \in \{1..n\} : x_j \geq 0 \wedge \forall i \in \{1..m\} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$. Tedaj je $P-$ju dualni program P': $\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ p. p. $\forall i \in \{1..m\} : y_i \geq 0 \wedge \forall j \in \{1..n\} : \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$.

Trditev. Dual duala je prvotni problem ZDB $P'' = P$.

Dokaz. Naj bo P $c^T x$ p. p. $Ax \leq b \wedge x \geq 0$ Tedaj je P' v std. obliki: $\max \left(-b\right)^T y$ p. p. $\left(-A^T\right) y \leq -c \wedge y \geq 0$. Tedaj P'': $\min \left(-c\right)^T x$ p. p. $\left(-A^T\right)^T x \geq -b \wedge x \geq 0$ oziroma v standardni obliki $\max c^T x$ p. p. $Ax \leq b \wedge x \geq 0$. $\square$

Izrek. *Šibki izrek o dualnosti (ŠID). Če velja, da je x dopustna rešitev problema P ($\max c^T x$ p. p. $Ax \leq b \wedge x \geq 0$) in y dopustna rešitev problema P' ($\min b^T y$ p. p. $A^T y \geq c \wedge y \geq 0$), potem velja $c^T x \leq b^T y$. ZDB dopustne rešitve duala predstavljajo zgornje meje za rešitve prvotnega problema.*

Dokaz. Dva ekvivalentna načina dokaza: Predpostavke: I: $Ax \leq b$, II: $x \geq 0$, III: $A^T y \geq c$, IV: $y \geq 0$.

1. Računajmo:

$$c^T x \overset{\text{III in II}}{\leq} \left(A^T y\right)^T x = y^T A x = y^T \left(Ax\right) \overset{\text{I in IV}}{\leq} y^T b = b^T y \quad \Longrightarrow \quad c^T x \leq b^T y$$

2. Računajmo:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{\text{III in II}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i x_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$\square$

Posledica 1. *Naj velja x dopusten za P, y dopusten za P', $c^Tx = b^Ty$. Sledi, da je x optimalna rešitev za P in y optimalna rešitev za P'. Če torej izvemo optimalno rešitev P in P', lahko preverimo, da je res optimalna.*

Dokaz. Naj bo x' poljubna dopustna za P. Tedaj $c^Tx' \overset{\text{ŠID}}{\leq} b^Ty \overset{\text{predpostavka}}{=} c^Tx \Rightarrow c^Tx' \leq c^Tx$. Naj bo y' poljubna dopustna za P'. Tedaj $b^Ty' \overset{\text{ŠID}}{\geq} c^Tx \overset{\text{predpostavka}}{=} b^Ty \Rightarrow b^Ty' \geq b^Ty$. □

Posledica 2. *Naj bo P neomejen. Tedaj je P' nedopusten.*

Dokaz. Naj bo P neomejen. PDDRAA P' je dopusten in naj bo y' dopustna rešitev za P'. Tedaj po ŠID velja $c^Tx \leq b^Ty'$ za vse za P dopustne x in zato je P omejen, kar je v protislovju s predpostavko. □

Izrek. *Krepki izrek o dualnosti (KID). Če je P optimalen problem, potem je tudi P' optimalen, njuni optimalni vrednosti pa sta enaki. Ekvivalentno:*

$$\exists x^* \geq 0 \forall x \geq 0 : Ax \leq b \Rightarrow c^Tx \leq c^Tx' \quad \Longrightarrow \quad \exists y^* \geq 0 \forall y \geq 0 : A^Ty \geq c \Rightarrow b^Ty \geq b^Ty^* \quad \wedge \quad c^Tx^* = b^Ty^*$$

Dokaz. Po predpostavki je P optimalen. P gotovo lahko pretvorimo v standardno obliko in ga rešimo z dvofazno simpleksno metodo. Tole bo malenkost dokaz z mahanjem rok, ker bomo kar predpostavili, kako izgleda zadnji slovar problema in njegovega duala. Dokaz s primerom pač. Oglejmo si torej primer — zadnji slovar okrajšanega primera kmetije (rešeno zgoraj, rešitev je $x_1^* = 0$, $x_2^* = 40$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 10$, $x_5^* = 90$, $x_6 = 0$):

$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6$$

$$x_4 = 10 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{15}x_6$$

$$x_5 = 90 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{15}x_6$$

$$z = 200 - \frac{1}{3}x_1 - 0x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 - \frac{1}{3}x_6$$

In zadnji slovar duala okrajšanega primera kmetije (rešeno zgoraj, rešitev je $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = \frac{1}{3}$, $y_4^* = \frac{1}{3}$, $y_5^* = 0$, $y_6^* = 0$):

$$y_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}y_1 - \frac{4}{15}y_2 + \frac{1}{15}y_5$$

$$y_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_5$$

$$y_6 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{9}{5}y_2 + \frac{4}{5}y_5$$

$$z = -200 - 10y_1 - 90y_2 - 0y_3 - 0y_4 - 40y_5 - 0y_6$$

Tu nastopi „dokaz s primerom“. Videti je, da so koeficienti dopolnilnih spremenljivk v zadnjem slovarju ($z = \cdots - 0x_4 - 0x_5 - \frac{1}{3}x_6$) ravno negacija optimalne rešitve dualnega problema ($y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = \frac{1}{3}$). In seveda, ker je dual duala primal, so koeficienti dopolnilnih spremenljivk v zadnjem slovarju duala ($z = \cdots - 0y_4 - 40y_5 - 0y_6$) ravno negacija optimalne rešitve prvotnega problema ($x_1^* = 0$, $x_2^* = 40$, $x_3^* = 0$). Temu pač verjamemo.

Označimo s c_j^* koeficient pri x_j v kriterijski funkciji zadnjega slovarja. V našem primeru je $\left(c_j^*\right)^T = \left[\frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3}\right]$. Optimalno vrednost P označimo z $v^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$. Potemtakem se simpleksna metoda za P konča z zadnjim slovarjem z

$$z = v^* + \sum_{j=1}^{n+m} c_j^* x_j,$$

kjer velja $c_j^* \leq 0$ in $c_j^* = 0 \Leftrightarrow x_j$ je bazna spremenljivka. Sedaj za P' uganimo optimalno vrednost: $y_i^* := -c_{n+i}^*$ (torej v našem primeru $y_i^* = \left[0, 0, \frac{1}{3}\right]$). Sedaj pa dokažimo, da je y^* dopustna rešitev dualnega problema in da velja $v^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$ (da je optimalna vrednost duala enaka optimalni vrednosti primala). Očitno so to nenegativna števila, ni pa očitno, da je dopustna, kar se tiče neenačb. Računajmo:

$$z = v^* + \sum_{j=1}^{n+m} c_j^* x_j = v^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} \left(\overset{=-y_i^*}{c_{i+n}^*}\right) \cdot \left(\overset{\text{dopolnilna: } =b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_{i+n}}\right) = v^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} (-y_i^*) \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) =$$

$$= v^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = v^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} =$$

$$= v^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^* x_j + x_j \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \right) = \left(v^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} x_j \left(c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \right) =$$

... toda z lahko zapišemo tudi drugače. z je kriterijska funkcija in zato po definiciji problema enaka ...

$$= \sum_{i=1}^{n} c_j x_j.$$

Linearno funkcijo smo zapisali na dva načina, ki morata biti enaka. Podrobneje si oglejmo dobljeno enačbo.

$$\left(v^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \right) + \sum_{j=1}^{n} x_j \left(c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j$$

Na levi strani je prosti koeficient (števila brez spremenljivke) $v^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$, na desni pa imajo vsi členi vsote spremenljivko, torej je prosti koeficient tam enak 0. Iz tega sledi, da je optimalna vrednost duala res enaka optimalni vrednosti primala:

$$v^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = 0 \sim v^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

in da so koeficienti pri istoležnih spremenljivkah enaki, torej

$$\forall j \in \{1..n\} : c_j = c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \sim \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j - c_j^*$$

... in ker velja $c_j^* \leq 0$, velja

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j - c_j^* \geq c_j \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j,$$

kar pa so ravno neenakosti duala, torej je y^* res dopustna rešitev za P'! Tu upoštevamo ŠID oziroma njegovo prvo posledico; ker $b^T y = v^* = c^T x$ in $A^T y \geq c$, je $b^T y$ optimalna vrednost duala. □

Katere možnosti so mogoče za P in P':

P/P'	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	da	da. če je P' neomejen, je P nedopusten	ne, KID
neomejen	da. če je P neomejen, je P' nedopusten	ne, ŠID	ne, KID
optimalen	ne, KID	ne, KID	da

Tabela 3: Možnosti za P in P'. Kaj je mogoče?

Zgled. Primer za dokaz, da se lahko zgodi, da sta P in P' oba nedopustna: Naj bo P:

$$\begin{array}{llll} \max & 2x_1 & -x_2 & \\ \text{p. p.} & -x_1 & +x_2 & \leq -2 \\ & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Ta je nedopusten, ker $x_1 - x_2 \leq 1$, torej $-1 \leq -x_1 + x_2$, skupaj s prvo enačbo torej $-1 \leq -x_1 + x_2 \leq -2$ oziroma $-1 \leq -2$, kar se ne more zgoditi. In njegov dual; P':

$$\begin{array}{llll} \min & -2y_1 & +x_2 & \\ \text{p. p.} & -y_1 & +y_2 & \geq 2 \\ & y_1 & -y_2 & \geq 1 \\ & y_1, & y_2 & \geq 0 \end{array}$$

Ta je tudi nedopusten, ker $y_1 - y_2 \geq 1$ oziroma $-1 \geq -y_1 + y_2$, skupaj s prvo enačbo torej $-1 \geq -y_1 + y_2 \geq 2$ oziroma $-1 \geq 2$, kar se ne more zgoditi. Oba sta nedopustna.

Posledica. *Za P in P' velja natanko ena od možnosti: bodisi sta oba optimalna bodisi sta oba nedopustna bodisi je en neomejen in drugi nedopusten.*

Izrek. *Izrek o dualnem dopolnjevanju (DD) (angl. complementary slackness). Naj bo x dopustna rešitev za P in y dopustna rešitev za P'. Potemtakem sta x in y optimalni rešitvi $\iff$*

$$\left(\forall j \in \{1..n\} : \left(x_j = 0 \vee \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j\right)\right) \wedge \left(\forall i \in \{1..m\} : \left(y_i = 0 \vee \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\right)\right)$$

ZDB (zapišimo disjunkcije drugače: $A \vee B \sim \overline{A} \Rightarrow B \sim \overline{B} \Rightarrow A$): x in y sta optimalni rešitvi (upoštevamo, da če x_j ni nič, bo pozitiven — negativen ne sme biti — in da če če $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j$ ni b, bo manjši od b — ker imamo problem v standardni obliki in mora x biti dopusten) $\iff$

$$\left(\forall j \in \{1..n\} : \left(x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j\right)\right) \wedge \left(\forall i \in \{1..m\} : \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \Rightarrow y_i = 0\right)\right)$$

ZDB če je v optimalni rešitvi primala spremenljivka pozitivna, pri dualni neenakosti dobimo enačaj (no slackness) IN če je leva stran strogo manjša od desne, je pripadajoča dualna spremenljivka v optimalni rešitvi duala enaka nič.

Dokaz. Po predpostavki velja, da je x dopustna za P, se pravi I. $x_j \geq 0$ in II. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, in da je y dopustna za P', se pravi III. $y_i \geq 0$ in IV. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$.

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{\text{I. in IV.}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \overset{\text{III. in II.}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = D$$

Trdimo, da sta x in y optimalna $\Leftrightarrow L = D$. Dokazujemo ekvivalenco: $(\Leftarrow)$: Posledica 1 ŠID-a. $(\Rightarrow)$: KID. Nadaljujmo trditev:

$$x = x^* \wedge y = y^* \Leftrightarrow L = D \Leftrightarrow \text{ oba} \leq \text{sta} = \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j \wedge \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall j \in \{1..n\} : \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = 0\right) \wedge \left(\forall i \in \{1..m\} : \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) y_i = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall j \in \{1..n\} : x_j = 0 \vee \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j\right) \wedge \left(\forall i \in \{1..m\} : y_i = 0 \vee \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\right).$$

□

Zgled. Dokaži, da je $(0, 20, 25)$ optimalna rešitev okrajšanega problema kmetije.

1. Prvi korak. Preverimo dopustnost:
   (a) $0, 20, 25 \geq 0$ velja
   (b) $0 + 20 + 25 \leq 50$ velja celo $<$
   (c) $3 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 25 \leq 250$ velja celo $<$
   (d) $10 \cdot 0 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 25 \leq 600$ velja celo $=$
2. Drugi korak. Vsak pozitiven x_j nam da enakost za dualne spremenljivke po DD:
   (a) $y_1^* + 4y_2^* + 15y_3^* = 5$
   (b) $y_1^* + 5y_2^* + 12y_3^* = 4$
3. Tretji korak. Vsaka neenakost iz koraka 1, izpolnjena z $<$, nam da eno ničelno dualno spremenljivko po DD:

(a) $y_1^* = 0$
(b) $y_2^* = 0$

4. Rešimo dobljen sistem linearnih enačb iz 2. in 3. koraka in preverimo dopustnost rešitve. Dobimo $y_3^* = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ in $y_3^* = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, torej dobimo rešitev $(y^*)^T = \left[0, 0, \frac{1}{3}\right]$. Ali je dopustna, preverimo iz preostale neenakosti v dualu: $\cancel{0 \cdot y_1^* + 3 \cdot y_2^*} + 10 \cdot y_3 \geq 3 \Rightarrow 10 \cdot \frac{1}{3} \geq 3$ velja.

Zgled. Z DD si ne moremo vedno preprosto pomagati pri dokazovanju optimalnosti. Primer: Dokaži, da je $(0, 0, 50)$ optimalna rešitev za okrajšan primer kmetije.

1. Prvi korak.
   (a) $0 + 0 + 50 \leq 50$ velja celo $=$
   (b) $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 50 \leq 250$ velja celo $=$
   (c) $10 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 12 \cdot 50 \leq 600$ velja celo $=$
2. Drugi korak.
   (a) $y_1^* + 5y_2^* + 12y_3^* = 4$
3. Tretji korak. Ni neenakosti izpolnjenih z $<$, ne dobimo ničelnih zagotovil za optimalno vrednost duala.
4. Imamo sistem enačb z eno enačbo in tremi neznankami in dobimo več rešitev. Najti je treba tisto pravo dopustno, ki je hkrati optimalna. To ni več tako preprosto kot reševanje sistema enačb)-:

Opomba. Povzetek:

- ŠID: x dop. za P in y dop. za $P' \Longrightarrow c^T x \leq b^T y$
- KID: x^* opt. za $P \Longrightarrow \exists y^*$ opt. za P in $c^T x^* = b^T y^*$
- DD: x dop. za P in y dop. za $P' \Longrightarrow x, y$ opt

$$\Leftrightarrow \left(\forall i \in \{1..m\} : y_i = 0 \vee \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\right) \wedge \left(\forall j \in \{1..n\} : x_j = 0 \vee \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j\right)$$

1.5 Ekonomski pomen dualnih spremenljivk

Oglejmo si eno izmed optimalnih rešitev za problem kmetije: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 20$, $x_3^* = 25$, $z^* = 200$. Neenačbe so izpolnjene takole:

$$0 + 20 + 25 < 50$$
$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 25 < 250$$
$$10 \cdot 0 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 25 = 600$$

Oglejmo si vpliv majhnih sprememb b na z^*:

- Če se $b_1 = 50$ spremeni v 51, je z^* še vedno 200 (že tako smo pod to omejitvijo).
- Če se $b_2 = 250$ spremeni v 251, je z^* še vedno 200 (že tako smo pod to omejitvijo).
- Če se $b_3 = 600$ spremeni v 601, se z^* poveča na $200 + \frac{1}{3}$ (se izkaže po izdelavi simpleksne metode znova z novo omejitvijo).

Pozornost preusmerimo za trenutek na optimalno rešitev dualnega problema: $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = \frac{1}{3}$.

Izrek. *Naj ima P neizrojeno optimalno bazno rešitev (vse bazne spremenljivke so različne od 0) ZDB v zadnjem slovarju so vsi prosti konstantni koeficienti > 0. Potem*

$$\exists \varepsilon > 0 \ni: \triangle z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \triangle b_i,$$

če je $|\triangle b_i| \leq \varepsilon$, kjer je $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ optimalna rešitev za P'.

Dokaz. Ne bomo dokazali. □

Posledica. *y_i^* nam daje „tržno" vrednost dobrine i. Ali se kmetiji splača vzeti kredit? Da, če je strošek kredita za* 1 *evro manjši kot $\frac{1}{3}$ evra. Ali se kmetiji splača kupiti več zemlje? Ne.*

1.6 Dual splošnega LP

Izrek. *Naj bo P oblike* $\max \sum_{k=1}^{n} c_j x_j$ *p. p.*

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ *za* $i \in \{1..m'\}$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ *za* $i \in \{m'+1..m\}$
- $x_j \geq 0$ *za* $j \in \{1..n'\}$

Dual programa P je P': $\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ *p. p.*

- $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ *za* $j \in \{1..n'\}$
- $\sum_{i}^{m} a_{ij} y_i = c_j$ *za* $j \in \{n'+1..n\}$
- $y_i \geq 0$ *za* $i \in \{1..m'\}$

Pripomba. Spomnimo: za LPVSO velja, da nenegativna spremenljivka v P predstavlja neenakost v P', neenakost v P pa predstavlja nenegativna spremenljivka v P'.

Vprašanje. *Kaj velja za splošni LP?*

- Nenegativna spremenljivka P ustreza neenakosti P'
- Neenakost P ustreza nenegativni spremenljivki P'
- Poljubna spremenljivka $x_j \lesseqgtr 0$ ustreeza enakosti P'
- enakost P ustreza poljubni spremenljivki P'

Dokaz. Pretvorimo v std. obliko:

$$\max \sum_{j=1}^{n'} c_j x_j + \sum_{j=n'+1}^{n} c_j \left(x_j' - x_j''\right)$$

pri pogojih

$$\forall i \in \{1..m\} : \sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right) \leq b_i$$

$$\forall i \in \{m'+1..m\} : -\sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right) \leq -b_i$$

$$\forall j \in \{1..n'\} : x_j \geq 0$$

$$\forall j \in \{n'+1, n\} : n_j', n_j'' \geq 0$$

In izračunamo njegov dual: NE RAZUMEM! $\square$

2 Matrične igre

Matrična igra je igra za dva igralca. Vsak igralec ima končno možnosti. Prvi igralec ima n izbir, drugi igralec ima m izbir. Če 1. igralec izbere $i-$to, 2. pa $j-$to možnost, drugi igralec prvemu plača $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Plačilna matrika matrične igre je torej oblike $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Zgled. Škarje kamen papir ima plačilno matriko (stolpci so po vrsti ŠKP, vrstice so po vrsti ŠKP)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zgled. Blotto. Pollkovnik Blotto in major Clark se borita za dve strateški točki. Blotto ima 4 bataljone, Clark 3. Vsak od njiju se odloči, kako bataljone razporediti med dve strateški točki. Blotto ima pet strategij, Clark pa štiri $(3+0, 2+1, \ldots)$.

Zmaga tisti, ki ima več bataljonov na posamezni strateški točki. Na vsaki točki poraženec plača $k+1$, kjer je k število njegovih bataljonov. Plačilna matrika se torej glasi

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 3+0 & 2+1 & 1+2 & 0+3 \\ 4+0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3+1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2+2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1+3 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0+4 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Igralci igrajo po principu najmanjšega tveganja. Igralec izbere potezo, ki ima najboljšo vrednost najslabšega rezultata.

- $M_1 = \max_i \min_j a_{ij}$ — vrednosti v plačilni matriki predstavljajo, koliko dobi prvi igralec. Zanj je torej slabo dobiti malo, zato za vsako vrstico izračuna najslabši (najmanjši) stolpec (stolpec predstavlja izbiro soigralca) in nato izbere tisto možnost, kjer je najslabši izkupiček najboljši (dobi največ — zato max).

- $M_2 = \min_j \max_i a_{ij}$ — Za drugega igralca so velike številke v matriki slabe; pomenijo, koliko plača prvemu, zato za vsak stolpec (tokrat stolpci predstavljajo njegove izbire) izračuna najslabšo (največjo) vrstico (vrstice pa predstavljajo izbire prvega igralca) in nato v njem izbere tisto možnost, kjer je najslabši izkupiček najboljši (tam, kjer plača najmanj — zato min).

Zgled. M_1 je pri Blottu dosežen v a_{22}, M_2 pa v a_{14}.

Trditev. $M_1 \leq M_2$ za matrično igro.

Dokaz. M_1 je dosežen v (i_1, j_1), M_2 pa v (i_2, j_2). Velja, da je $M_1 \leq a_{i_1} a_{j_2}$ — v vrstici i_1 je najslabša možnost za prvega igralca stolpec j_1, j_2 bo kvečjemu toliko slab (in slabe vrednosti so za prvega igralca male številke). Poleg tega velja $a_{i_1} a_{j_2} \leq M_2$ — v stolpcu j_2 je najslabša možnost za drugega igralca vrstica i_2, i_1 bo kvečjemu tako slab (in slabe vrednosti so za drugega igralca velike številke). □

Definicija. (i_0, j_0) je sedlo matrike A, če je $a_{i_0 j_0}$ najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu.

Zgled. Blotto nima sedla. Primer matrike s kar dvema sedloma (a_{22} in a_{24}):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trditev. Matrika A ima sedlo $\Leftrightarrow M_1 = M_2$.

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

($\Rightarrow$) Naj bo (i_0, j_0) sedlo. Tedaj velja $M_1 \overset{\text{I.}}{\geq} \min_j a_{i_0 j} = a_{i_0 j_0} = \max_i a_{i j_0} \overset{\text{II.}}{\geq} M_2$ in zato skupaj $M_1 \geq M_2$. Od prej vemo $M_1 \leq M_2$, zato $M_1 = M_2$.

Razlaga I.: M_1 je definiran kot $\max_i \min_j a_{ij}$. S tem ko smo fiksirali vrstico, smo lahko izpustili kakšne vrstice z večjimi minimalnimi vrednostmi.

Razlaga II.: M_2 je definiran kot $\min_j \max_i a_{ij}$. S tem ko smo fiksirali stolpec, smo lahko izpustili kakšne stolpce z manjšimi maksimalnimi vrednostmi.

($\Leftarrow$) Naj bo M_1 dosežen v (i_1, j_1) in M_2 dosežen v (i_2, j_2) ter velja $M_1 = M_2$. Trdimo, da je (i_1, j_2) sedlo. Velja

$$M_1 = a_{i_1 j_1} \leq a_{i_1 j_2} \leq a_{i_2 j_2} = M_2 = M_1$$

Torej $a_{i_1 j_2}$ je najmanjši v svoji vrstici, ker je enak M_1 in največji v svojem stolcpu, ker je enak M_2. Enak je M_1 in M_2 zato, ker smo ga zgoraj ujeli v tale sendvič neenakosti.

$\square$

Če je (i_0, j_0) sedlo, je i_0 optimalna strategija za prvega igralca in j_0 optimalna strategija za drugega igralca. Torej nas bodo v nadaljevanju zanimale mešane strategije. Mešana strategija je seznam verjetnosti — kolikšna je verjetnost, da bo igralec izbral $i-$to strategijo. Torej takole:

- Prvi igralec izbere $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \geq 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$, kjer x_i pomeni verjetnost, da prvi igralec izbere strategijo i.
- Drugi igralec izbere $(y_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y_i \geq 0$, $y_1 + \cdots + y_m = 1$, kjer y_i pomeni verjetnost, da drugi igralec izbere strategijo j.

Definicija. $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ je čista strategija.

Če ima plačilna matrika sedlo, izbereta oba igralca čisto strategijo.

Definicija. Matematično upanje (povprečje) (angl. expected value / EV) izračunamo kot produkt obeh verjetnosti, zmnožen z vrednostjo plačilne matrike:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j \cdot a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(A^T y\right)_i = x^T A y$$

- Prvi ob neznanju igranja drugega igralca torej izbere: $\max_x \min_y x^T A y$
- Drugi pa $\min_y \max_x x^T A y$

Zvezna funkcija na kompaktu (zaprta in omejena množica) doseže max in min, zato zgornji vrednosti obstajata.

Trditev. $\max_x \min_y x^T A y \leq \min_y \max_x x^T A y$

Dokaz. Naj bo $\max_x \min_y x^T A y$ dosežen v (x', y') in $\min_y \max_x x^T A y$ v (x'', y''). Tedaj velja

$$\left(x^{'}\right)^T A y' \leq \left(x^{'}\right)^T A y^{''} \leq (x'')^T A y''$$

$\square$

Trditev. Naj bo $x \in \mathbb{R}^n$ fiksen. Tedaj je $\min_y x^T A y = \min_{j \in \{1..m\}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$.

Dokaz. Z $(e_j)_{j \in \{1..m\}}$ označimo standardne bazne vektorje v $\mathbb{R}^m$.

$$\min_{y \in \mathbb{R}^m} x^T A y \leq \min_{y \in (e_j)_{j \in \{1..m\}}} x^T A y = \min_{j \in \{1..m\}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

S tem smo dokazali očitno smer, $\min_y x^T A y \leq \min_{j \in \{1..m\}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$. Sedaj dokažimo še $\geq$.
Naj bo $s \coloneqq \min_{j \in \{1..m\}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = \min_{y \in (e_j)_{j \in \{1..m\}}} x^T A e_j$.

$$x^T A y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\overbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i}^{\geq s}\right) \overbrace{y}^{\geq 0}{}_j \geq \sum_{j=1}^{m} s y_j \overset{\text{I.}}{=} s$$

Razlaga I.: Za vektor y velja, da ima same nenegativne komponente, ki se seštejejo v 1 (slednji del je predvsem pomemben), torej velja $\sum_{j=1}^{m} y_j č = č$. s je samo številka/skalar (EV).

Torej smo dobili še $\min x^T A y \geq s$ in zato skupaj z $\min_y x^T A y \leq s$ dobimo $\min_y x^T A y = s$. S tem smo izvedeli, da se lahko drugi igralec ob znani strategiji prvega igralca ustrezno brani s čisto strategijo. $\square$

Iskanje optimalne strategije prvega igralca Pred nami je sledeč optimizacijski problem: $\max \min_{j \in \{1..m\}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$ p. p. $x_1 + \cdots + x_n = 1$, $\forall i \in \{1..n\} : x_i \geq 0$. To ni linearen program, ker kriterijska funkcija ni linearna (vsebuje min). Trik: $\max \min \{a, b\}$ pretvorimo v $\max s \ni: s \leq a \wedge s \leq b$. Problem pretvorimo takole:

$$\max s$$

pri pogojih

$$\forall j \in \{1..m\} : s \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

$$x_1 + \cdots + x_n = 1$$

$$\forall i \in \{1..n\} : x_i \geq 0$$

To pa sedaj je linearen program, ki ga lahko rešimo z doslej znanimi metodami.

Iskanje optimalne strategije drugega igralca Pred nami je sledeč optimizacijski problem: $\min \max_{i \in \{1..n\}} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_y$ p. p. $y_1 + \cdots + y_n = 1$, $\forall j \in \{1..m\} : y_i \geq 0$. To ni linearen program, ker kriterijska funkcija ni linearna (vsebuje max). Trik: $\min \max \{a, b\}$ pretvorimo v $\min t \ni: t \geq a \wedge t \geq b$. Problem pretvorimo takole:

$$\min s$$

pri pogojih

$$\forall i \in \{1..n\} : s \geq \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j$$

$$y_1 + \cdots + y_n = 1$$

$$\forall j \in \{1..m\} : y_i \geq 0$$

Ta dva linearna programa (za prvega in drugega igralca) sta si dualna. Nista v standardni obliki, temveč sta splošna (glej dual splošnega problema). Oba problema sta dopustna, nenazadnje za oba vedno obstaja dopustna rešitev oblike $x = (1, 0, \cdots, 0)\,, s = \min_{j \in \{1..m\}} a_{1j}$. Torej po ŠID obstaja optimalna rešitev za oba problema.

Izrek. *Izrek o minimaxu. Za poljubno matriko A velja, da je* $\max_x \min_y x^T A y = \min_y \max_x x^T A y$. *Tej skupni optimalni vrednosti pravimo „strateško sedlo“ oziroma vrednost igre.*

Dokaz. Sledi iz zgornjih linearnih programov, na katerih uporabimo KID. □

Definicija. Igra je poštena, če ima vrednost 0. Igra je simetrična, če $A^T = A$.

Trditev. Vsaka simetrična igra je poštena.

Dokaz.

$$v = \max_x \min_y x^T A y = \max_x \min_y x^T (-A)^T y = -\min_x \max_y x^T A^T y = -\min_x \max_y (Ax)^T y = -\min_x \max_y y^T (Ax) =$$

preimenujemo spremenljivke $x \to y$ in $y \to x$:

$$= -\min_y \max_x x^T A y = -v$$

Ker $v = -v \implies v = 0$. □

Kako poiščemo optimalno strategijo? Z dvofazno simpleksno metodo.

Zgled. Kako preverimo, da je $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = x^* = y^*$ optimalna strategija za ŠKP?

- Dopustnost: Obe rešitvi sta dopustni.
- Enaki vrednosti kriterijskih funkcij (vrednost igre): $0 = \min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = \max_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = 0$.

Kako preverimo, da sta $x^* = \left(\frac{4}{9}, 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{4}{9}\right)$ in $y^* = \left(\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{48}{90}, \frac{3}{90}\right)$ optimalni strategiji za Blotto?

- Dopustnost: Obe rešitvi sta dopustni.

- Enaki vrednosti kriterijskih funkcij (vrednost igre):
  - $\min_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \approx 1,\overline{5}$
  - $\max_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \approx 1,\overline{5}$

Zgled. Igra Morra. Z levico pokažemo en ali dva prsta, z desnico napovemo, koliko prstov bo pokazal drugi igralec s svojo levico. Če uganemo, dobimo toliko enot, kolikor sta oba igralca pokazala s svojima levicama.

	1,1	1,2	2,1	2,2
1,1	0	2	-3	0
1,2	-2	0	0	3
2,1	3	0	0	-4
2,2	0	-3	4	0

Tabela 4: Plačilna matrika za Morro

Vse optimalne strategije so $(0, t, 1-t, 0)$ za $t \in \left[\frac{4}{7}, \frac{3}{5}\right]$. Ena ustrezna je torej recimo $x^* = y^* = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$. Izračunajmo vrednost igre. $\min \max_j \sum_{i=1}^{4} a_{ij} x_i = \min\left\{0, 0, 0, \frac{9}{5} - \frac{8}{5}\right\} = 0 = \max \min_i \sum_{j=1}^{4} a_{ij} y_j = \max\left\{0, 0, 0, -\frac{1}{5}\right\}$. Igra je poštena.

Definicija. Naj bo $x, x^* \in \mathbb{R}^n$. Rečemo, da x dominira x', če je po komponentah $x \geq x'$.

Če v A $i-$ta vrstica dominira $j-$to, lahko $j-$to vrstico izbrišemo. Če $i-$ti stolpec dominira $j-$tega, lahko izbrišemo $i-$tega.

Zgled. Primer:

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{2} & 3 & -6 & -3 \\ \cancel{6} & -2 & 4 & 5 \\ \cancel{7} & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ \cancel{-3} & \cancel{3} & \cancel{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -6 & \cancel{-3} \\ -2 & 4 & \cancel{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Zgled. Poenostavljeni poker. Imejmo dva igralca in tri karte (1, 2, 3).

Potek licitacij: Najprej oba stavita 1, nato prvi igralec stavi 0 ali 1, nato drugi igralec stavi 0 ali 1, nato lahko prvi igralec stavi 0 ali 1, če je doslej stavil (0,1). Dobitki se izplačujejo takole:

A	B	A	zmaga	dobitek
0	0	/	višja karta	1
0	1	0	B	1
0	1	1	višja karta	2
1	0	/	A	1
1	1	/	višja karta	2

Tabela 5: Dobitki pri poenostavljenem pokru

Zgled. Opcije za stavo 1. igralca:

- A1: stavi 0, če B stavi 1, spet 0
- A2: stavi 0, če B stavi 1, A spet stavi 1
- A3: stavi 1

Stava za drugega igralca:

- B1: stavi vedno 0
- B2: stavi enako kot A
- B3: stavi nasprotno kot A
- B4: stavi vedno 1

Strategija prvega igralca je trojica (A_i, A_j, A_k) (če ima karto 1, 2 ali 3). Na voljo je torej 27 strategij. Strategija drugega igralca je trojica (B_i, B_j, B_k) (če ima karto 1, 2 ali 3). Na voljo je torej 64 strategij.

Primer A: $(3, 1, 2)$, B $(1, 2, 4)$: Matematično upanje: $\frac{1}{6}(-2-2+1-1+1+1) = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$. S takimi strategijami služi drugi igralec.

A	B	licitacije	dobitek
1	2	1 1	-2
1	3	1 1	-2
2	1	0 0	1
2	3	0 1 0	-1
3	1	0 0	1
3	2	0 0	1

Tabela 6: Preizkus izbranih strategij

Optimizacija zaenkrat ogromne plačilne matrike z dominiranjem:
Prvi igralec:

- Če ima karto 1: $A1$ dominira $A2$.
- Če ima karto 2: $A3$ dominira $A1$.
- Če ima karto 3: $A2$ dominira $A3$: Če ima 2. igralec 1, se igra po A2 izvede „0 0 +1 ali 0 0 1 +2“, po A3 pa „1 0 +1“. Če ima 2. igralec 3, se igra po A2 izvede „0 1 1 -2“, po A3 pa „1 1 -2“.

Ostane nam še 8 strategij za A in s tem 8 vrstic v plačilni matriki.
Drugi igralec:

- Če ima karto 1: $B2$ in $B4$ nista smiselni.
- Če ima karto 3: Izberemo vedno $B4$.
- Če ima karto 2: $B1$ dominira $B3$ in $B2$ dominira $B4$. Dokaz:
  - Če ima 1. igralec 1:
    - $B1$ „0 0 -1“ ali „1 0 +1“ dominira $B3$ „0 1 -1“ ali „1 0 +1“
    - $B2$ „0 0 -1“ ali „1 1 -2“ dominira $B4$ „0 1 -1“ ali „1 1 -2“
  - Če ima 1. igralec 3:
    - $B1$ „0 0 +1“ ali „1 0 +1“ dominira $B3$ „0 1 1 +2“ ali „1 0 +1“
    - $B2$ „0 0 +1“ ali „1 1 +2“ dominira $B4$ „0 1 1 +2“ ali „1 1 +2“

Ostanejo le še 4 strategije za B in skupaj samo še 8x4 plačilna tabela:

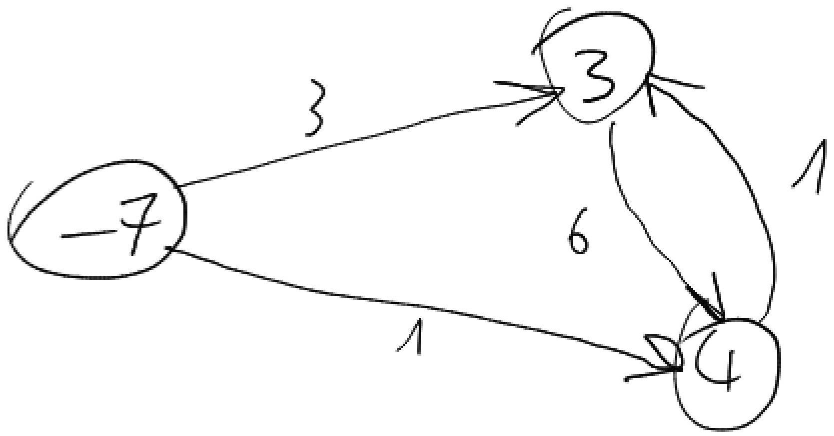
A\B	114	124	314	324
112	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
113	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
122	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
123	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
312	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$
313	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$
322	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
323	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$

Tabela 7: Okrajšana plačilna tabela za poenostavljeni poker

Če bi se lotili iskati optimalno strategijo, bi prišli do petparametrične rešitve. Ena ustrezna rešitev je takale: $x^*_{112} = \frac{2}{3}$, $x^*_{122} = \frac{1}{3}$, $y^*_{114} = \frac{2}{3}$, $y^*_{324} = \frac{1}{3}$. $v^* = \frac{-1}{18}$, se pravi igra ni poštena in je v prid drugemu igralcu.

3 Problem razvoza (angl. transshipment problem)

Imamo 3 mesta. V 1. proizvajajo 7 enot mleka, v 2. in 3. pa porabljajo 3 oz. 4 enote mleka. Stroški prevoza so naslednji: $1 \to 2$ za 3/enoto, $1 \to 3$ za 1/enoto, $2 \to 3$ za 6/enoto, $3 \to 2$ za 1/enoto. Kako s čim manjšimi stroški zadovoljiti potrebe po mleku?



Slika 1: Graf omrežja

Dopustna rešitev cene 13: direktno iz mesta 1 pošljemo 3 enote v 2 in 4 enote v 3. Dopustna rešitev cene 10: 7 enot v mesto 3, 3 enote v mesto 2.

Definicija. Naloga pri problemu razvoza je torej usmerjen utežen graf (angl. digraph) $G = (V, E)$. Za vsako vozlišče je podan $b_v \in \mathbb{R}$. Če mleko mesto porablja, $b_v > 0$, če mleko mesto proizvaja pa $b_v < 0$. Smiselno je lahko $b_v = 0$. Cene razvoza na enoto so navedene na povezavah med mesti in sicer $c_e \in \mathbb{R}$ za $e \in E$ (lahko so negativne). Veljati mora $\sum_{v \in V} b_v = 0$. Iščemo $(x_e)_{e \in E} \ni: \forall e \in E : x_e \geq 0 \wedge \forall v \in V : \left(\sum_{\text{konec}(e)=v} x_e - \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e \right) = b_v$ (slednje je Kirchoffov zakon) ob minimizaciji $\sum_{e \in E} x_e \cdot c_e$.

Zgled. V našem mlečnem primeru dveh mest torej

$$\min 3x_{12} + x_{13} + 6x_{23} + x_{32}$$

pri pogojih

$$-x_{12} - x_{13} = -7$$

$$x_{12} + x_{32} - x_{23} = 3$$

$$x_{13} + x_{23} - x_{32} = 4$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32} \geq 0$$

Oziroma $c = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ in nato $\min c^T x$ p. p. $Ax = b \wedge x \geq 0$. A je incidenčna matrika grafa. $A = [a_{ve}]_{v \in V, e \in E}$, $a_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{konec}\,(e) = v \\ -1 & \text{začetek}\,(e) = v \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$, $b = [b_v]_{v \in V}$, $c = [c_e]_{e \in E}$.

Problem razvoza kot LP se glasi $\min c^T x$ p. p. $Ax = b, x \geq 0$ oziroma v splošni obliki $\max (-c)^T x$ p. p. $(-A)\, x = -b$, $x \geq 0$

Njegov dual je $\max b^T y$ p. p. $A^T y \leq c$ oziroma kot dual splošne oblike $\min (-b)^T y$ p. p. $(-A)^T y \geq -c$. $y = [y_v]_{v \in V}$.

Podrobneje si oglejmo dual: $\max \sum_{y=1}^{n=|V|} b_i y_i$ p. p. $\forall ij \in E : y_j - y_i \leq c_{ij}$ oziroma $y_i + c_{ij} \geq y_j$.

Kaj pove izrek o dualnem dopolnjevanju? Naj bosta x, y dopustni rešitvi za P, P'. Tedaj x, y optimalni

$$\Leftrightarrow \left(\forall i \in \{1..m'\} : \overbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i}^{\text{vedno velja — kirchoff}} \lor y_i = 0\right) \land \left(\forall j \in \{1..n'\} : x_j = 0 \lor \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j\right)$$

Torej, če sta x, y dopustni za PR in PR', sta optimalni natanko tedaj, ko $\forall ij \in E : x_{ij} = 0 \lor y_i + c_{ij} = y_j$.

Problem razvoza lahko rešujemo z dvofazno simpleksno metodo. Mi ga bomo reševali s simpleksno metodo na omrežjih.

Opomba. y je $\overset{\text{optimalna}}{\text{dopustna}}$ rešitev duala problema razvoza $\Leftrightarrow$ $y + (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$ (sama enaka števila) je $\overset{\text{optimalna}}{\text{dopustna}}$ rešitev duala problem razvoza.

Kriterijska funkcija duala: $\sum_{i=1}^{n} b_i (y_i + \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + \varepsilon \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$ (po predpostavki PR)

Definicija. x je drevesna dopustna rešitev (DDR) $\Leftrightarrow$ je dopustna $\land \exists$ vpeto drevo $T \ni: \forall e \notin T : x = 0$.

Trditev. Če obstaja dopustna rešitev, obstaja tudi drevesna dopustna rešitev. Predpostavimo, da je G povezan, ko ignoriramo smeri povezav.

Dokaz. Denimo, da v $G \exists$ neusmerjen (ignoriramo smeri) cikel, na katerem so vse vrednosti $x_e > 0$. Izberemo si eno smer. Vse povezave v to smer so preme, v drugo smer pa obratne. Če v eno smer ni obratne povezave, si izberemo drugo (tam bo obratna povezava). Na premih povezavah x_e povečamo za t, na obratnih pa x_e zmanjšamo za t. Kirchoffov zakon še vedno velja (če sta obe povezavi vozlišča na ciklu premi, če obe kažeta ven, če obe kažeta navznoter, če sta obe obratni). Za t vzamemo $\min_{\text{obratne}} x_e =: t$. Tako ogranimo nenegativnost in zagotovimo ničelni razvoz na povezavi, na kateri je minimum dosežen. Nadaljujemo, dokler obstajo cikli. Na koncu dobimo $x_e > 0$ na nekem gozdu. Za T vzamemo ta gozd in poljubne povezave, da gozd povežemo (v DDR imamo seveda lahko ničelne povezave). $\square$

Pripomba. Kako se spremeni cena razvoza pri našem postopku? Za $0 < t \cdot \left(\sum_{e \text{ prema}} c_e - \sum_{e \text{ obratna}} c_e\right)$. Ali pade ali naraste pa je odvisno od predznaka izraza v oklepajih.

3.1 Simpleksna metoda na omrežjih.

Začnemo z x DDR. Poiščemo ustrezne razvozne cene (dual) na DDR, začenši z $y_1 = 0$. Preostale izračunamo z $y_i + c_{ij} = y_j$ za $ij \in T$. Ker ni ciklov, je to enolično rešljivo.

Če velja $\forall ij \in E \setminus T : y_i + c_{ij} \geq y_j$, je y dopustna za dual in s tem sta po DD x in y optimalni. V nasprotnem primeru $\exists ij \in E \setminus T \ni: y_i + c_{ij} < y_j \sim c_{ij} < y_j - y_i$. Tedaj dodamo ij v T in dobimo natanko en cikel, ki ga usmerimo v smeri ij. Dobimo preme in obratne povezave, izberemo $t := \min_{e \text{ obratne}} x_e$. Na premih povečamo za t, na obratnih zmanjšamo za t. Gotovo na eni od obratnih postane 0 — odstranimo to obratno povezavo, na kateri je dosežen minimum, iz T. ij se imenuje vstopna, odstranjena pa izstopna povezava. Povezave v drevesu so tako kot bazne spremenljivke. Če ni obratne povezave, je primer neomejen.

Kako se spremeni cena razvoza? V splošnem: $\sum_{e \text{ prema}} c_e - \sum_{e \text{ obratna}} c_e < 0$. Cena se spremeni za $\overset{\geq 0}{t} \cdot \overset{<0}{\left(\sum_{e \text{ prema}} c_e - \sum_{e \text{ obratna}} c_e\right)} \leq 0$. Gotovo se zmanjša, če najdemo dve vozlišči, kjer je $y_i + c_{ij} < y_j$.

Pripomba. Če velja $\forall ij \in E \setminus T : y_i + c_{ij} \geq y_i$ (I.), potem je $(x_e)_{e \in E}$ optimalna. To vemo že iz DD. Dokažimo še enkrat. Naj bo $\overline{x_e}$ še ena rešitev: Velja $(y_i + c_{ij} - y_j)\, x_{ij} = 0$, ker $y_i + c_{ij} = y_j$ na povezavah v drevesu (drugod pa velja $x_{ij} = 0$). Toda za $\overline{x_e}$ nimamo zagotovitve, da so povezave na T, zatorej je lahko $\left(\overset{\geq 0 \text{ po predp I.}}{y_i + c_{ij} - y_j}\right) \overset{\geq 0}{\overline{x_{ij}}} \geq 0$. Iz tega sledi

$$(y_i + c_{ij} - y_j)\, x_{ij} \leq (y_i + c_{ij} - y_j)\, \overline{x_{ij}}.$$

Naredimo $\sum_{ij \in E}$ po tej neenačbi:

$$\sum_{ij \in E} (y_i + c_{ij} - y_j)\, x_{ij} \leq \sum_{ij \in E} (y_i + c_{ij} - y_j)\, \overline{x_{ij}}$$

$$\sum_{ij\in E} c_{ij}x_{ij} + \sum_{ij\in E} (y_i - y_j)\, x_{ij} \leq \sum_{ij\in E} c_{ij}\overline{x_{ij}} + \sum_{ij\in E} (y_i - y_j)\, \overline{x_{ij}}$$

$$\sum_{ij\in E} c_{ij}x_{ij} - \sum_{ij\in E} (y_j - y_i)\, x_{ij} \leq \sum_{ij\in E} c_{ij}\overline{x_{ij}} - \sum_{ij\in E} (y_j - y_i)\, \overline{x_{ij}}$$

Upoštevamo $y_j - y_i = \left(A^T y\right)_{ij}$ (ne razumem) in $\sum_{ij\in E} c_{ij}x_{ij} = c^T x$ in $\sum_{ij\in E} \left(A^T y\right)_{ij} x_{ij} = \left(A^T y\right)^T x$:

$$c^T x - \left(A^T y\right)^T x \leq c^T \overline{x} - \left(A^T y\right)^T \overline{x}$$

$$c^T x - y^T A x \leq c^T \overline{x} - y^T A \overline{x}$$

Upoštevamo $Ax = b$ (Kirchoffovi zakoni)

$$c^T x - y^T b \leq c^T \overline{x} - y^T b$$

$$c^T x \leq c^T \overline{x}$$

Ker je $\overline{x}$ poljubna, je x res optimalna.

Pripomba. Naj bo x DDR.

$$(y_i + c_{ij} - y_j)\, x_{ij} = 0 \quad / \sum_{ij\in E}$$

$$c^T x - b^T y = 0$$

Torej je $c^T x = b^T y$ res za vsako DDR in pripadajoče razvozne cene.

Trditev. Vpeto drevo enolično določa DDR.

Dokaz. Izberimo list. x_e je na edini povezavi z lista enolično določen. List in povezavo odstranimo, rekurzivno nadaljujemo. □

Posledica. *Dopustnih rešitev je končno. Edini način, da se simpleksna metoda na omrežjih ne ustavi, je ciklanje degeneriranih korakov. Tega se (ne bomo dokazali) rešimo s Cunninghamovim pravilom:*

- *Naj bo r izbrani koren.*
- *Med kandidatkami za izstop izberemo tisto, ki je prva na poti od r do vstopne povezave.*

Pripomba. Do začetne DDR pridemo preko reševanje pomožnega problema: Naj bo r poljuben koren. Za vsak $v \in V \setminus \{r\}$:

- Če je $b_v \geq 0$ (mesto porablja mleko): dodamo umetno povezavo rv, če še ne obstaja, in nastavimo $x_{rv} \coloneqq b_v$.
- Če je $b_v < 0$ (mesto proizvaja mleko): dodamo umetno povezavo vr, če še ne obstaja, in nastavimo $x_{vr} \coloneqq -b_v$.

Za vse ostale povezave nastavimo $x_e \coloneqq 0$. Prvotne povezave naj imajo ceno 0, umetne pa ceno 1. To je očitno DDR. Problem je tudi omejen, saj imamo končno povezav s cenami bodisi 0 bodisi 1. Sedaj konstruiran pomožen problem rešimo.

Če je optimalna vrednost tega problema 0, dobimo dopustno rešitev originalnega problema, ko odstranimo umetne povezave. Če pa je optimalna vrednost neničelna, pa dopustna rešitev prvotnega problema ne obstaja.

Pripomba. Če ne moremo izbrati izstopne povezave ⇒ vse povezave v ciklu so preme ⇒ lahko jim dodamo poljuben t ⇒ problem je neomejen.

Izrek. *Izrek o celoštevilskih rešitvah. Naj bo $b_v \in \mathbb{Z}$.*

1. *Če ∃ dopustna rešitev, obstaja tudi celoštevilska dopustna rešitev.*
2. *Če ∃ optimalna rešitev, obstaja tudi celoštevilska optimalna rešitev.*

Dokaz. Dokazujemo dve trditvi.

1. Rešimo pomožni problem. Razvozi so sprva $\pm b_v$ ali 0 in ostanejo celoštevilski tekom reševanja.

2. Naredimo še drugo fazo. Na vasakem koraku imamo celoštevilsko dopustno rešitev, torej tudi na koncu, ko imamo optimalno rešitev.

□

Definicija. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je dvojno stohastična, če $a_{ij} \geq 0$, $\forall j \in \{1..n\} : \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ in $\forall i \in \{1..n\} : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ ZDB vsaka vrstica se sešteje v 1 in vsak stolpec se sešteje v 1 in matrika ima samo nenegativne vrednosti.

Zgled.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Definicija. $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je permutacijska, če je v vsakem stolpcu in vrstici natanko ena 1, ostalo so pa ničle. Očitno je vsaka permutacijska matrika dvojno stohastična.

Pripomba. Permutacijskih matrik dimenzije $n \times n$ je $n!$.

Trditev. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dvojno stohastična. Potem $\exists P$ permutacijska, da velja $p_{ij} > 0 \Rightarrow a_{ij} > 0$.

Dokaz. Skonstruirajmo omrežje: (V, E), $V = \{v_1, \ldots, v_n, s_1, \ldots, s_n\}$ (moč $2n$) $E = \{v_i s_j ; \forall : i, j \in [n] \ni : a_{ij} > 0\}$. Torej natanko vse povezave iz *v*rhnjih v *s*podnja vozlišča, kjer je pripadajoči element dvojno stohastične matrike A pozitiven. $\forall i : b_{v_i} := -1$, $\forall i : b_{s_i} := 1$. $\forall i, j : c_{v_i s_j} := 0$. Dopustna rešitev: $x_{v_i s_j} = a_{ij}$ (za $a_{ij} > 0$) — hkrati tudi optimalna.

Zakaj je to dopustna rešitev? Poglejmo Kirchoffove zakone — to velja po predpostavki, da je A dvojno stohastična:

$$\sum_j a_{ij} = 1, \quad \sum_i a_{ij} = 1$$

Po izreku o celoštevilskih rešitvah obstaja celoštevilska rešitev: $x_{v_i s_j} \in \mathbb{Z}$. Označimo $p_{ij} := x_{v_i s_j}$ ($= 0$, če $v_i s_j \notin E$).

Tedaj velja $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij}$, $\sum_i p_{ij} = 1$, $p_{ij} \in \mathbb{N}_0$ in $p_{ij} > 0 \Rightarrow p_{ij} = 1 \Rightarrow x_{v_i s_i} = 1 \Rightarrow v_i s_j \in E \Rightarrow a_{ij} > 0$. Potemtakem je res, da je P permutacijska matrika. □

Posledica. *Köningov izrek o plesnih parih. Imejmo $r-$regularen dvodelni graf $G = X \cup Y$. Iz tega sledi $|X = \{x_1, \ldots, x_n\}| = |Y = \{y_1, \ldots, y_n\}| = n$ (ker $|X| \cdot r = |Y| \cdot r$). Potem ima G popolno prirejanje (natanko ena povezava iz vsakega vozlišča).*

Dokaz. Uporabili bomo zadnjo trditev. Konstruirajmo dvojno stohastično matriko $A = [a_{ij}]$ takole: $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{r} & ; x_i y_j \in E \\ 0 & ; x_i y_j \notin E \end{cases}$. A je dvojno stohastična — $a_{ij} > 0$, $\sum_j a_{ij} = r\frac{1}{r} = 1 = \sum_i a_{ij}$. Obstaja permutacijska matrika $P \in \mathbb{R}^{n \times n} \ni : p_{ij} > 0 \Rightarrow p_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ij} > 0 \Rightarrow a_{ij} = \frac{1}{r} \Rightarrow x_i y_j \in E$. To nam daje popolno prirejanje — $M = \{x_i y_j ; p_{ij} = 1\} \subseteq E$ ($p_{ij} = 1 \Rightarrow x_i y_i \in E$) Res je prirejanje, pri fiksnem i je $\sum_j p_{ij} = 1$ (analogno za j) $\Rightarrow$ natanko ena povezava gre iz vsakega vozlišča. □

3.2 Problem razvoza z omejitvami (PRO)

Definicija. Naj bo G usmerjen utežen graf, $\forall v \in V : b_v \in \mathbb{R}$, $\forall e \in E : c_e \in \mathbb{R}$, $\forall e \in E : u_e \in [0, \infty]$. Iščemo $\min c^T x$, da veljajo Kirchoffovi zakoni ($Ax = b$) in $\forall e \in E : 0 \leq x_e \leq u_e$ (sedaj imamo še zgornje omejitve prevoza na povezavah).

Definicija. Če je x dopustna rešitev, pravimo

- $x_e = 0 \Leftrightarrow$ „povezava je PRAZNA",
- $x_e = u_e \Leftrightarrow$ „povezava je NASIČENA".

Definicija. x je drevesna dopustna rešitev (DDR) $\Leftrightarrow$ je dopustna $\wedge \exists$ v G vpeto drevo $T \ni : \forall e \in E : e \notin T \Rightarrow e$ prazna $\vee e$ nasičena.

3.2.1 Reševanje PRO s simpleksno metodo

Naj bo x DDR. Izračunamo y razvozne cene. Zahtevi, da vstopno povezavo $ij \notin T$ dodamo v drevo:

- če je ij prazna: $y_i + c_{ij} < y_j$
- če je ij nasičena: $y_i + c_{ij} > y_j$

Izbiranje izstopne povezave:

- če je ij prazna: $t \coloneqq \min\left(\{u_e - x_e; e \text{ prema}\} \cup \{x_e; e \text{ obratna}\}\right)$. Na premih povečamo za t, na obratnih zmanjšamo za t. Kjer je minimum dosežen, povezava izstopa.
- če je ij nasičena: $t \coloneqq \min\left(\{x_e; e \text{ prema}\} \cup \{u_e - x_e; e \text{ obratna}\}\right)$. Na premih zmanjšamo za t, na obratnih povečamo za t. Kjer je min dosežen, povezava izstopa.

Trditev. Če ne moremo izbrati vstopne povezave, je dana DDR optimalna.

Dokaz. Naj bo x DDR, v kateri ni moč najti vstopne povezave. Po tej predpostavki velja $\forall ij \notin T : x_{ij} = 0 \wedge y_i + c_{ij} \geq y_j \vee x_{ij} = u_{ij} \wedge y_i + c_{ij} \leq y_j$. Naj bo sedaj $\overline{x}$ poljubna dopustna rešitev.

Oglejmo si relacijo med naslednjima dvema izrazoma:

$$(y_i + c_{ij} - y_j)\,\overline{x_{ij}} \quad \underline{?} \quad (y_i + c_{ij} - y_j)\,x_{ij}$$

- če je $x_{ij} \in T$, potem $0 = 0$
- če je $x_{ij} \notin T$ in $x_{ij} = 0$, potem $(\geq 0)\,(\geq 0) \geq 0$
- če je $x_{ij} \in T$ in $x_{ij} = u_{ij}$, potem $(y_i - c_{ij} - y_j) \leq 0$ in $\overline{x_{ij}} \leq x_{ij}$. Ko $/ \cdot (y_i - c_{ij} - y_j)$, kar je ≤ 0, dobimo $(y_i - c_{ij} - y_j)\overline{x_{ij}} \geq (y_i - c_{ij} - y_j)\,x_{ij}$.

$\underline{?}$ je potemtakem $\geq$. Nadaljujmo; na obeh straneh neenačbe napravimo $\sum_{ij \in E}$:

$$\sum_{ij \in E} (y_i + c_{ij} - y_j)\,\overline{x_{ij}} \quad \geq \quad \sum_{ij \in E} (y_i + c_{ij} - y_j)\,x_{ij}$$

$$\sum_{ij \in E} c_{ij}\overline{x_{ij}} - \overline{x}^T\left(A^T y\right) \geq \sum_{ij \in E} c_{ij}x_{ij} - x^T\left(A^T y\right)$$

... uporabimo $\left(A\overline{x}\right)^T y = b^T y$ in $\left(Ax\right)^T y = b^T y$ (x je dopustna rešitev — Kirchoffovi zakoni) ...

$$\sum_{ij \in E} c_{ij}\overline{x_{ij}} \cancel{- b^T y} \geq \sum_{ij \in E} c_{ij}x_{ij} \cancel{- b^T y}$$

$$c^T\overline{x} \geq c^T x,$$

torej je x res optimalna. □

Pripomba. Če so vse povezave preme in kapacitete ∞, ne moremo izbrati izstopne povezave. Takrat je problem neomejen. To se lahko zgodi le, če je vstopna povezava prazna. Če je nasičena, bo izstopna vedno obstajala, nenazadnje vsaj tista, ki je bila vstopna.

Vprašanje. *A se postopek vedno zaključi? Ne, lahko pride do ciklanja, ki se mu lahko izognemo tako, da (Cunninghanovo pravilo — ne bomo dokazali):*

- *če je vstopna prazna, izmed kandidatk za izstop vedno izberemo prvo*
- *če je vstopna nasičena, izmed kandidatk za izstop vedno izberemo zadnjo.*

Pripomba. Lahko se zgodi, da je vstopna povezava ista kot izstopna. Recimo če se pretvori iz prazne v nasičeno ali obratno.

Vprašanje. *Kako do začetne DDR?*

Naj bo r koren. Za vsako vozlišče $v \in V \setminus \{r\}$:

- *če je $b_v < 0$: dodamo umetno povezavo vr s kapaciteto $-b_v$, razen če je $vr \in E$ in $u_{vr} \geq -b_v$.*
- *če je $b_v \geq 0$: dodamo rv s kapaciteto b_v, razen če je $rv \in E$ z $u_{rv} \geq b_v$.*

V tem pomožnem primeru je vedno trivialno najti DDR: $x_{vr} = -b_v$, $x_{rv} = b_v$. Umetne povezave imajo ceno 1, prvotne pa ceno 0. Naredimo simpleksno metodo na omrežjih. Če dobimo optimalno vrednost 0, je problem dopusten, sicer ni.

4 Pretoki in prerezi

Zgled. Imamo šest mest. V A je izvir vode, v F pa poraba. Dane povezave med njimi so cevi s kapacitetami. Cilj je iz A v F prepeljati čim več vode, upoštevaje kapacitete.

Definicija. Problem maksimalnega pretoka — max flow. Naj bo G usmerjen graf ter s in t izbrani vozlišči — začetno in končno. $\forall e \in E : \text{konec}\,(e) \neq s \wedge \text{začetek}\,(e) \neq t$. Imamo kapacitete: $\forall e \in E : u_e \in [0..\infty]$. Za dopusten pretok x velja $\forall e \in E : 0 \leq x_e \leq u_e$. Veljati morajo Kirchoffovi zakoni: $\forall v \in V \setminus \{s,t\} : \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = \sum_{\text{konec}(e)=v} x_e$ (ničelni pretok je dopusten). Iščemo $\max \sum_{\text{začetek}(e)=s} x_e$ — vrednost pretoka.

Pripomba. Seštejmo Kirchoffov zakon po vseh $v \in V \setminus \{s,t\}$:

$$\sum_{\text{začetek}(e)\neq s} x_e = \sum_{\text{konec}(e)\neq t} x_e$$

odštejmo na obeh straneh povezave, ki se ne začno v s in ne končajo v t:

$$\sum_{\text{začetek}(e)\neq s \wedge \text{konec}(e)=t} x_e = \sum_{\text{konec}(e)\neq t \wedge \text{začetek}(e)=s} x_e$$

prištejmo x_{st} (če obstaja, sicer je 0):

$$\sum_{\text{konec}(e)=t} x_e = \sum_{\text{začetek}(e)=s} x_e$$

Definicija. Graf kot v maksimalnem pretoku. Prerez (cut) je množica vozlišč $C \subseteq V$, če $s \in C$ in $t \notin C$. Kapaciteta prereza je $\sum_{i\in C, j\notin C} u_{ij} \in [0,\infty]$. Iščemo minimalni prerez, t. j. prerez z najmanjšo kapaciteto. Gotovo $\exists$, ker je prerezov končno.

Trditev. Naj bo x poljuben pretok in C poljuben prerez. Velja vrednost pretoka $x \leq$ kapaciteta C.

Dokaz. Dokaz trditve. Začnimo s Kirchoffovim zakonom:

$$\forall v \in V \setminus \{s,t\} : \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = \sum_{\text{konec}(e)=v} x_e \qquad / \sum_{v\in C\setminus\{s\}}$$

$$\sum_{\text{začetek}(e)\in C\setminus\{s\}} x_e = \sum_{\text{konec}(e)\in C\setminus\{s\}} x_e$$

(sicer itak ni povezave, ki bi imela s za konec, zato bi lahko tudi pisali kar $\text{konec}\,(e) \in C$). Sedaj odštejemo skupne povezave, se pravi tiste, ki se začno in končajo v vozliščih, ki sta obe v C:

$$\sum_{\text{začetek}(e)\in C\setminus\{s\} \wedge \text{konec}(e)\notin C\setminus\{s\}} x_e = \sum_{\text{konec}(e)\in C\setminus\{s\} \wedge \text{začetek}(e)\notin C\setminus\{s\}} x_e$$

$$\sum_{i\in C, j\notin C} x_{ij} - \sum_{j\notin C} x_{sj} = \sum_{i\notin C, j\in C} x_{ij} + \sum_{j\in C} x_{sj}$$

$$\sum_{i\in C, j\notin C} x_{ij} - \sum_{i\notin C, j\in C} x_{ij} = \sum_{j\in C} x_{sj} + \sum_{j\notin C} x_{sj} = \sum_{j\in V} x_{s_j} = \text{prostornina pretoka}$$

$$\sum_{j\in V} x_{s_j} = \sum_{i\in C, j\notin C} x_{ij} - \sum_{i\notin C, j\in C} x_{ij}$$

Sedaj uporabimo $\sum_{i\notin C, j\in C} x_{ij} \geq 0$ in $\forall i \in C, j \notin C : x_{ij} \leq u_{ij}$

$$\sum_{j\in V} x_{s_j} = \sum_{i\in C, j\notin C} x_{ij} - \overbrace{\sum_{i\notin C, j\in C} x_{ij}}^{\geq 0} \leq \sum_{i\in C, j\notin C} x_{ij} \leq \sum_{i\in C, j\notin C} u_{ij}$$

Desna stran je natanko kapaciteta prereza. Torej je vrednost poljubnega pretoka manjša ali enaka kapaciteti poljubnega prereza

$$\sum_{j\in V} x_{s_j} \leq \sum_{i\in C, j\notin C} u_{ij}.$$

$\square$

Posledica. *Če potemtakem najdemo prerez in pretok iste vrednosti, sta oba optimalna. ZDB Če je vrednost pretoka $x =$ kapaciteta prereza C, sta oba optimalna.*

Izrek. *Velja natanko ena od možnosti:*

- *Obstajajo pretoki s poljubno velikimi vrednostmi $\Rightarrow$ v takem primeru imajo vsi prerezi kapaciteto ∞. Očitno po prejšnji trditvi.*
- *Obstaja največji pretok $\Rightarrow \exists$ prerez, katerega kapaciteta je enaka volumnu največjega pretoka. (tole pa ni več očitno)*

Dokaz. Prevedemo na problem razvoza z omejitvami. Dodamo povezavo ts. Na prvotne povezave damo ceno $c_e \coloneqq 0$, na ts pa ceno $c_{ts} \coloneqq -1$ in kapaciteto $u_{ts} \coloneqq \infty$. Na vseh vozliščih nastavimo proizvodnjo na $b_v = 0$.

Dobljeni problem je očitno dopusten, nenazadnje je dopustna rešitev $\forall e \in E : x_e = 0$. Potemtakem

- je lahko bodisi neomejen: tedaj so vsi pretoki neomejeni in vse kapacitete prerezov ∞.
- bodisi ima optimalno rešitev: tedaj ima optimalno drevesno rešitev x. Osredotočimo se na to vejo.

  Naj bodo y_v razvozne cene. Oglejmo si ts. Ta zagotovo ni nasičena, saj ima neskončno kapaciteto. Velja $y_t + c_{ts} \geq y_s$ (ker $c_{ts} = -1$), torej $y_t \geq y_s + 1$.

  Sedaj definiramo $C \coloneqq \{v \in V; y_v \leq y_s\}$.

  Trdimo, da je C prerez: $s \in C$, ker $y_s \leq y_s$, $t \notin C$, ker $y_t \nleq y_s$ (kajti $y_t \geq y_s + 1$).

  Trdimo, da ima C enako kapaciteto kot prostornina pretoka.

  Vzemimo $i \in C, j \notin C$, torej $y_i \leq y_s$ in $y_j > y_s$. Primerjajmo sedaj $y_i + \overset{=0\text{ (prvotna)}}{c_{ij}} \;\underline{?}\; y_j$. Vemo $y_i + 0 = y_i \leq y_s < y_j$, torej $\underline{?}$ je $<$. Kaj lahko sklepamo o ij glede na to, da je rešitev optimalna in da velja $y_i + c_{ij} < y_j$? Če bi bila povezava neprazna in nenasičena, bi morala biti v drevesu, torej $y_i + c_{ij} = y_j$. Če bi bila povezava prazna, bi lahko naredili en korak simpleksne metode na omrežjih, torej x ne bi bila optimalna rešitev. Se pravi je ij nasičena.

  Vzemimo $i \notin C, j \in C$, torej $y_i > y_s$ in $y_j \leq y_s$. Primerjajmo sedaj $y_i + \overset{=0\text{ (prvotna)}}{c_{ij}} \;\underline{?}\; y_j$. Vemo $y_i + 0 > y_s \geq y_j$, torej $\underline{?}$ je $>$. Kaj lahko sklepamo o ij glede na to, da je rešitev optimalna in da velja $y_i + c_{ij} > y_j$? Če bi bila povezava neprazna in nenasičena, bi morala biti v drevesu, torej $y_i + c_{ij} = y_j$. Če bi bila povezava nasičena, bi lahko naredili en korak simpleksne metode na omrežjih, torej x ne bi bila optimalna rešitev. Se pravi je ij prazna.

  Oglejmo si sedaj prostornino našega pretoka:

  $$\sum_{v\in V} x_{sv} = \sum_{i\in C, j\notin C} \overset{\text{nasičene}}{x_{ij}} - \sum_{i\notin C, j\in C} x_{ij} = \sum_{i\in C, j\notin C} u_{ij} - \sum_{i\notin C, j\in C} \overset{\text{prazne}}{0}$$

  Torej je prostornina pretoka enaka kapaciteti prereza. Iz tega sledi, da je pretok maksimalen in prerez minimalen in da imata enako vrednost.

$\square$

4.1 Algoritem za hitro reševanje naloge največjega prereza: Ford-Fulkerson (FF)

Naj bo x pretok. Rečemo, da je $v_0 v_1 \cdots v_k$ povečujoča pot, če velja $v_0 = s$, $v_k = t$ in $\forall i \in \{1..(k-1)\} : \overset{\text{prema}}{v_i v_{i+1} \in E} \wedge \overset{\text{nenasičena}}{x_{v_i v_{i+1}} < u_{v_i v_{i+1}}} \vee \overset{\text{obratna}}{v_{i+1} v_i \in E} \wedge \overset{\text{neprazna}}{x_{v_{i+1} v_i} > 0}$. Označimo $t \coloneqq \min\left(\left\{u_{v_i v_{i+1}} - x_{v_i v_{i+1}}; \overset{\text{prema}}{v_i v_{i+1} \in E}\right\} \cup \left\{x_{v_{i+1} v_i}; \overset{\text{obratna}}{v_{i+1} v_i \in E}\right\}\right)$. Velja $t > 0$ — degeneriranih korakov nimamo. Na premih pretok povečamo za t, na obratnih ga zmanjšamo za t. V vseh situacijah se Kirchoffov zakon ohranja.

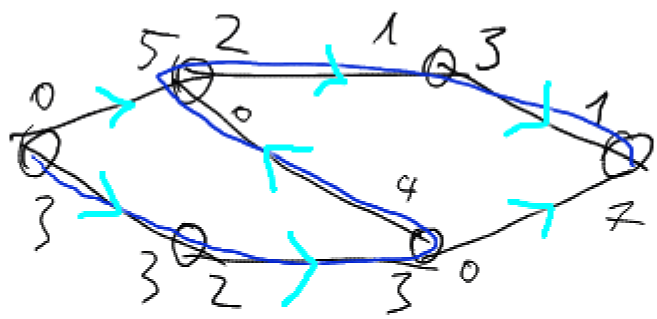
Kako pa najdemo povečujočo pot? $C \coloneqq \{s\}$ dopolnjujemo s sosedi, ki so ustrezni kandidati za povečujočo pot. Povezave do teh sosedov so nenasičene za preme in neprazne za obratne. Nadaljujemo z dopolnjevanjem, dokler $t \in C$. Tedaj smo našli povečujočo pot in povečamo pretok in ponovimo postopek (ZDB povečujočo pot lahko recimo iščemo z BFS). Lahko pa se zgodi, da $t \notin C$ in ne moremo več ustvariti novih ustreznih vozlišč. Tedaj je C prerez. Za $ij \in E : i \in C, j \notin C$ je ij nasičena, sicer bi j lahko dodali v C. Za $ij \in E : i \notin C, j \in C$ je ij prazna, sicer bi i lahko dodali v C. V tem primeru je vrednost pretoka $\sum_{i\in C, j\notin C} \cancelto{u_{ij}}{x_{ij}} - \sum_{i\notin C, j\in C} \cancelto{0}{x_{ij}} = \sum_{i\in C, j\notin C} u_{ij}$.

Ali se FF vedno konča? Če imamo iracionalne kapacitete, se ne konča nujno.

Znano implementacijo FF sta naredila Edmunds in Karp, tam sta vedno izbrala najkrajšo povečujočo pot (BFS). Izkaže se, da taka implementacija vedno preneha z izvajanjem.

V enem koraku lahko pregledno operiramo tudi na več povečujočih poteh hkrati, če so le-te disjunktne po povezavah.

Ali bi FF deloval, če bi uporabili le povečujoče poti s premimi povezavami? Ne. Primer:



Slika 2: Edina preostala povečujoča pot je označena z rumeno. Nima le premih povezav.

5 Prirejanja in pokritja

Definicija. Naj bo $G = (V, E)$ graf. $M \subseteq E$ je prirejanje $\Leftrightarrow \forall e, f \in M : e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset$ ZDB nobeno vozlišče iz V ni krajišče več povezav iz M.

Prirejanje je popolno, če je prirejanje in $\forall v \in V \exists e \in M : v \in e$ ZDB vsako vozlišče iz V je krajišče natanko ene povezave iz M.

Pokritje je $P \subseteq V$, če $\forall e \in E : e \cap P \neq \emptyset$ ZDB vsaka povezava ima vsaj eno krajišče v P.

Ustrezno prirejanje je $M = \emptyset$. Ustrezno pokritje je $P = V$.

Pripomba. Popolno prirejanje ne obstaja vedno. Recimo graf z liho vozlišči nima popolnega prirejanja. Recimo tricikel ima $\mu(G) = 1$, torej eno izmed treh vozlišč ne bo krajišče nobene povezave, ne glede na izbiro prirejanja M.

Definicija. $\mu(G)$ je velikost največjega prirejanja. $\tau(G)$ je velikost najmanjšega pokritja.

Trditev. Več trditev:

1. Naj bo M prirejanje in P pokritje. Tedaj velja $|M| \leq |P|$.
2. $\mu(G) \leq \tau(G)$ (neposredno sledi)
3. M prirejanje, P pokritje, $|M| = |P| \Rightarrow M$ je največje prirejanje in P najmanjše pokritje in velja $\mu(G) = \tau(G) = |M| = |P|$. (neposredno sledi)

Pripomba. V splošnem ne velja $\mu(G) = \tau(G)$: Primer je graf dveh tri-ciklov, in ene povezave med njima: $\mu(G) = 3$ toda $\tau(G) = 4$. Velja pa $\mu(G) = \tau(G)$ za dvodelne grafe. Dokaz kasneje.

Dokaz. Dokaz trditve. Na vsaki povezavi iz M mora biti vsaj eno vozlišče iz P. $\forall e \in M \exists v \in P : v \in e$ in za različne e dobimo različne v, ker je M prirejanje. Dobimo injektivno (ker je M pokritje) preslikavo $M \to P$. ☐

Definicija. Naj bo M prirejanje v $G = (V, E)$. $e \in E$ je vezana, če $e \in M$. $e \in E$ je prosta, če $e \notin M$. $v \in V$ je vezano vozlišče, če $\exists \binom{\text{sledi iz } M \text{ pokritje}}{!} e \in M \ni: v \in e$. $v \in V$ je prosto vozlišče, če $\nexists e \in M \ni: v \in e$.

Definicija. Pot je izmenična/alternirajoča, če se na njej izmenjujejo proste in vezane povezave.

Definicija. Alternirajoča pot je povečujoča, če se začne in konča s prostim **vozliščem**. Ni dovolj, da se začne in konča s prosto povezavo, da bo povečujoča, je pa to potreben pogoj.

Definicija. Naj bosta A, B množici. $A \oplus B \coloneqq (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je simetrična razlika množic.

Trditev. Če je M prirejanje in P povečujoča pot, je $M \oplus P$ tudi prirejanje in $|M \oplus P| = |M| + 1$ ZDB če v grafu s prirejanjem M in povečujočo potjo P obrnemo lastnost prosta/vezana povezav v P (torej za $e \in P$: $e \in M \to e \notin M$ in obratno $e \notin M \to e \in M$), bomo zmanjšali število povezav v M za 1 in M bo ostal prirejanje.

Dokaz. Očitno. □

Izrek. *Berge. M je največje prirejanje $\Leftrightarrow \nexists$ povečujoča pot.*

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

($\Rightarrow$) Sledi iz zgornje trditve.

($\Leftarrow$) Naj M ni največje prirejanje. Tedaj $\exists$ drugo prirejanje M', ki je večje. Naj bo H podgraf G z $E(G) = M \oplus M'$, $V(H) = V$. Velja $\deg_H(v) \leq 2$ za vsako vozlišče, ker sta M in M' prirejanji. Vsako vozlišče je lahko vsebovano v 0 povezavah, v eni ali v dveh, nikakor pa ne v večih.

Kaj to pomeni za komponente tega grafa, ki ima samo vozlišča stopnje kvečjemu 2? To pomeni, da so komponente tega grafa poti (kjer se izvor povezav izmenjuje — ..., iz M, iz M', iz M, iz M', ...) in sodi cikli (z isto lastnostjo).

Lihi cikli ne morejo biti, saj se morajo povezave v ciklu izmenjevati, torej ena iz M, druga iz M', tretja spet iz M in nikakor se ne more zgoditi, da bi dve povezavi iz M ali dve povezavi iz M' imeli skupno vozlišče (ker sta M in M' prirejanji).

Ker je $|M'| > |M|$, je v H ena komponenta, ki je pot, ki se začne in konča s povezavo iz M', na kateri se izmenjujejo povezave po izvoru (M', M, M', M, M', ...). Taka pot je glede na M alternirajoča. Povezave iz M' namreč niso iz M, sicer bi zaradi konstrukcije H ($M \oplus M'$) ne bile povezave v H. Preverimo še, da sta začetno in končno vozlišče prosti, da bo pot povečujoča glede na M.

Če začetno vozlišče ne bi bilo prosto (če bi bilo vezano), bi obstajala neka povezava s krajiščem v tem vozlišču, ki je iz M. Toda $e \notin H$, ker potem to vozlišče ne bi bilo začetno — vzeli smo celo komponento v grafu H. Ker $e \notin H \wedge e \in M$, sklepamo, da $e \in M'$, kar se pa tudi ne more zgoditi, ker vozlišče že ima povezavo iz M' (prva povezava na najdeni poti).

Isto sklepanje, da je končno vozlišče prosto. Našli smo povečujočo pot.

□

Iskanje največjega prirejanja smo prevedli na iskanje povečujočih poti. Torej: začnemo s praznim prirejanjem in iščemo povečujoče poti. Ko naenkrat ta ne obstaja več, smo našli največje prirejanje.

Za splošne grafe obstaja Edmundsov algoritem/Blossom za iskanje največjega prirejanja, ki je učinkovit (težavnostni razred P).

Za dvodelne grafe madžarska metoda pokaže $\mu(G) = \tau(G)$.

5.1 Madžarska metoda (MM)

Madžarska metoda je metoda za iskanje povečujočih poti v dvodelnih grafih.

Vhodni podatki za metodo: $G = (V = X \cup Y, E)$ dvodelni graf, M prirejanje (lahko začnemo s praznim). Iščemo povečujoče poti. Definiramo dve množici, $S = \{\text{prosta vozlišča v } X\}$, $T = \emptyset$. T bo podmnožica Y. Na vsakem koraku:

$$S \coloneqq S \cup \{\text{vsa vozlišča v } X, \text{ do katerih lahko pridemo po vezanih povezavah iz } T\}$$

$$T \coloneqq T \cup \{\text{vsa vozlišča } Y, \text{ do katerih lahko pridemo po prostih povezavah iz } S\}$$

Zapisujemo si, po kateri povezavi smo prišli do vozlišča v V, ko ga dodamo.

Če v nekem trenutku T vsebuje kakšno prosto vozlišče, smo našli povečujočo pot. Sicer je v nekem trenutku novi S isti kot stari S in novi T isti kot stari T. Tedaj je M največje prirejanje in našli bomo pokritje, da bo $|P| = |M|$.

Trditev. Naj se MM ustavi in vrne $S' = S$ in $T' = T$ in M. Potem je $P \coloneqq (X \setminus S) \cup T$ pokritje in $|P| = |M|$. Torej je M največje prirejanje, P najmanjše pokritje in $\mu(G) = \tau(G)$.

Dokaz. Na koncu imamo S in $X \setminus S$ ter T in $Y \setminus T$. Zaradi dvodelnosti grafa so povezave lahko le med S in T, med S in $Y \setminus T$, med $X \setminus S$ in T ter med $X \setminus S$ in $Y \setminus T$.

Trdimo, da med S in $Y \setminus T$ ni vezanih povezav. Po konstrukciji S so edina vezana vozlišča iz S tista, ki so vezana z vozlišči iz T.

Trdimo, da med S in $Y \setminus T$ ni prostih povezav. Če bi kakšna bila, ne bi bili na koncu MM, saj bi lahko vozlišča, ki imajo proste povezave (vsa taka so v S), dodali v T.

Trdimo, da med $X \setminus S$ in T ni vezanih povezav. Če bi kakšna bila, ne bi bili na koncu MM, saj bi lahko vozlišča X, ki imajo vezane povezave do T, dodali v S.

Torej imamo zares lahko samo med S in T ter $X \setminus S$ in $X \setminus T$ vezane ali proste povezave in med $X \setminus S$ in T samo proste povezave, med S in $Y \setminus T$ pa nimamo povezav.

Iz tega takoj sledi, da je $P = (X \setminus S) \cup T$ pokritje — torej da za vsako povezavo v grafu velja, da vsebuje vsaj eno vozlišče. Vse povezave imajo vsaj eno krajišče iz $X \setminus S$ ali iz T.

Dokažimo še, da je $|M| = |P|$.

$$M_1 \coloneqq \{\text{vezane povezave med } S \text{ in } T\}$$

$$M_2 \coloneqq \{\text{vezane povezave med } X \setminus S \text{ in } X \setminus T\}$$

Očitno je $|M| = |M_1| + |M_2|$ (to so vse vezane).

Trdimo, da je $|M_1| = |T|$ ZDB da ima vsako vozlišče iz T natanko eno povezavo iz M_1. Če je v T vozlišče, ki ni krajišče kake povezave iz M_1, je to vozlišče prosto. Če bi bilo to res, ne bi bili na koncu MM, saj bi našli povečujočo pot.

Trdimo, da je $|M_2| = |X \setminus S|$ ZDB da ima vsako vozlišče iz $X \setminus S$ natanko eno povezavo iz M_2. Če je v $X \setminus S$ vozlišče, ki ni krajišče kake povezave iz M_2, je to vozlišče prosto. To se ne more zgoditi, ker smo po definiciji vsa prosta vozlišča dali v S.

Torej $|M| = |M_1| + |M_2| = |T| + |X \setminus S| = |P|$ in zato je $|M|$ maksimalno pokritje. □

Pripomba. Imamo sledeče probleme:

	dvodelni grafi	splošni grafi
največje prirejanje	lahek — MM	lahek — Edmunds
najmanjše pokritje	lahek — MM	težek — NP-poln

Tabela 8: Kako težki so problemi

Težavnost MM: M lahko povečamo največ $n-$krat ($n = VG$), S in T pa za eno povečavo $M-$ja zopet največ $n-$krat: $O\left(n^2\right)$.

Izrek. *Hall. G dvodelni graf, $V = X \cup Y$. Obstaja popolno prirejanje iz X v $Y \Leftrightarrow \forall A \subseteq X : |A| \leq |N(A)|$.*

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco:

($\Rightarrow$) Očitno. Elementi vsake podmnožice X so povezani z vsaj toliko elementi iz množice Y, ker obstaja popolno prirejanje iz X v Y, zato $|A| \leq |N(A)|$.

($\Leftarrow$) Po predpostavki velja $\forall A \subseteq X : |A| \leq |N(A)|$. Naj bo M največje prirejanje G. Dobimo S, T iz MM, Ker $S \subseteq X$, po predpostavki velja $|S| \leq |N(S)|$. Poleg tega, ker so edine povezave iz S v T, je $N(S) \subseteq T$. Torej $|S| \leq |N(S)| \leq |T|$, zategadelj $|S| \leq |T|$.

$$|M| \overset{\text{MM}}{=} |P| \overset{\text{MM}}{=} |X \setminus S| + |T| \geq |X \setminus S| + |S| = |X|$$

Dokazali smo $|M| \geq |X|$. No, ker gre za prirejanje v dvodelnem grafu, $|M| \leq |X|$, se pravi $|M| = |X|$ in spet zaradi dvodelnosti velja, da obstaja popolno prirejanje iz $|X|$ v $|Y|$.

□

5.2 Madžarska metoda z utežmi (MMU)

Imejmo polni dvodelni graf $K_{n,n}$ (ima $n!$ popolnih prirejanj) z utežmi na povezavah $c_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Torej dobimo matriko $C = [c_{ij}] \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^{n \times n}$. Vsako popolno prirejanje je podano s permutacijo $\pi \in S_n$: $x_i \sim y_{\pi_i}$. Mi iščemo najcenejše popolno prirejanje, torej $\min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^{n} c_{i\pi_i}$. Čeprav je popolnih prirejanj $n!$, obstaja učinkovit algoritem za iskanje najcenejšega popolnega prirejanja.

Tipični primer: Ljudje in naloge; vsakemu človeku želimo prirediti eno nalogo — assignment problem.

Opazimo razliko med tem problemom in problemom potujočega trgovca (TSP), kjer Ω omejimo samo na permutacije z natanko enim ciklom in naloga postane NP-težka: $\min_{\pi \in S_n, \pi \text{ ciklična}} \sum_{i=1}^{n} c_{i\pi_i}$.

Postopek MMU Naj bo $C := [c_{ij}]_{ij \in \{1..n\}} \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^{n \times n}$.

1. Od vsakega stolpca odštejemo najmanjši element tega stolpca. Torej bo gotovo vsaj ena 0 v stolpcu in vsi elementi stolpca bodo nenegativni. To je analogno manjšanju vseh uteži iz enega vozlišča za neko vrednost in to očitno spremeni cene vseh možnih popolnih prirejanj za to številko, namreč vsako vsebuje povezavo iz vozlišča, ki ga predstavlja ta stolpec in to natanko enkrat. Potemtakem to ohranja najcenejše popolno prirejanje oziroma celo vrstni red možnih popolnih prirejanj, urejenih po ceni — vsakemu se cena zmanjša za konstanto.

2. Od vsake vrstice odštejemo najmanjšo vrednost. Torej bo gotovo vsaj ena 0 v stolpcu in vsi elementi vrstice bodo nenegativni. Podoben razmislek kot zgoraj pripelje do zaključka, da tudi te operacije ohranjajo najcenejše popolno prirejanje.

3. Nova matrika vsebuje elemente iz $[0, \infty]$, v vsakem stolpcu in v vsaki vrstici pa je vsaj ena ničla. Očitno se maksimalno prirejanje ni spremenilo.

4. Če lahko najdemo n ničel v tej matriki, da je v vsakem stolpcu in v vsaki vrstici natanko ena izmed teh izbranih, smo našli najcenejše popolno prirejanje s ceno 0. To so povezave na mestih teh ničel.

5. Izkaže se, da se v nasprotnem primeru da vse ničle pokriti z $< n$ vrsticami in stolpci. Tedaj vzamemo $\varepsilon :=$ najmanjša nepokrita vrednost. Velja $\varepsilon > 0$. Od vseh nepokritih elementov odštejemo ε, vsem dvakrat pokritim elementom prištejemo ε. Enkrat pokrite elemente pustimo. Nadaljujemo s korakom 4.

Zgled. Oglejmo si primer štafete z začetka te skripte. Rešili ga bomo z MMU. Ker potrebujemo kvadratno matriko oziroma poln dvodelni graf, kjer je $|X| = |Y|$, bomo dodali dva stolpca tabeli (dve fiktivni disciplini). Lahko si predstavljamo, da bo tekmovalec, ki dobi tako fiktivno disciplino, „sedel na klopi“ — zato v teh dveh stolpcih cene nastavimo na 0.

tekmovalec\disciplina	prsno	hrbtno	delfin	prosto	klop1	klop2
1	65	73	63	57	0	0
2	67	70	65	58	0	0
3	68	72	69	55	0	0
4	67	75	70	59	0	0
5	71	69	75	57	0	0
6	69	71	66	59	0	0

Tabela 9: Podatki o tekmovalcih — matrika C

Izvedemo koraka 1 in 2 in dobimo novo matriko:

tekmovalec\disciplina	prsno	hrbtno	delfin	prosto	klop1	klop2
1	$\cancel{0}$	$\cancel{4}$	$\cancel{0}$	$\cancel{2}$	$\xcancel{0}$	$\xcancel{0}$
2	2	7	2	3	$\bcancel{0}$	$\bcancel{0}$
3	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$	$\cancel{6}$	$\cancel{0}$	$\xcancel{0}$	$\xcancel{0}$
4	2	6	7	4	$\bcancel{0}$	$\bcancel{0}$
5	$\cancel{6}$	$\cancel{0}$	$\cancel{12}$	$\cancel{2}$	$\xcancel{0}$	$\xcancel{0}$
6	4	2	3	4	$\bcancel{0}$	$\bcancel{0}$

Tabela 10: Matrika C po izvajanju korakov 1 in 2.

V njej najdemo $5 < 6$ vrstic/stolpcev, ki jih prečrtamo, da prečrtamo vse ničle. $\varepsilon = 2$ odštejemo neprečrtanim in prištejemo dvakrat prečrtanim. Doimo novo matriko:

tekmovalec\disciplina	prsno	hrbtno	delfin	prosto	klop1	klop2
1	$\underline{0}$	4	0	2	2	2
2	0	5	$\underline{0}$	1	0	0
3	3	3	6	$\underline{0}$	2	2
4	0	4	5	2	$\underline{0}$	0
5	6	$\underline{0}$	12	2	2	2
6	2	0	1	2	0	$\underline{0}$

Tabela 11: Matrika C po izvajanju korakov 1 in 2.

Sedaj pa lahko najdemo n ničel, ki pokrijejo celo matriko in s tem optimalno štafeto.

Iskanje ničel za črtanje vrstic Kako vemo, ali obstaja n ničel, da z njimi pokrijemo celo matriko? Kako vemo, da ne, ko ne, in kako potem najdemo $< n$ ničel, ki pokrijejo vse ničle?

Konstruiramo pomožen „ničelni graf“. To je dvodelni graf $V = \{v_1, \ldots, v_n, s_1, \ldots, s_n\}$, vozlišča ene particije predstavljajo vrstice, vozlišča druge pa stolpce. $v_i v_j \in E \Leftrightarrow c_{ij} = 0$ ZDB povežemo vrstico s stolpcem, če je njun presek ničla.

Na tem pomožnem ničelnem grafu poženemo MM in dobimo največje prirejanje in najmanjše pokritje. Vemo, da sta v dvodelnem grafu enaka. Lahko se zgodi dvoje:

- bodisi je M popolno prirejanje ($|M| = n$) — potemtakem smo našli n ničel (povezave v M, ki povezujejo particijo vrstic in particijo stolpcev) tako, da pokrijemo z njimi celo matriko,
- bodisi m ni popolno prirejanje ($|M| < n$). Madžarska metoda nam v tem primeru vrne še najmanjše popolno pokritje, da $|P| = |M| < n$. Se pravi lahko izberemo $< n$ vozlišč (P) — bodisi vrstic bodisi stolpcev, ki pokrijejo vse ničle.
  - Vrsticam v P (torej vozlišča iz $X \setminus S$) prištejemo ε, stolpcem izven P (torej v $Y \setminus T$) odštejemo ε. To ne spremeni najcenejšega popolnega pokritja. Očitno, razlaga je malce višje.
  - Res torej velja, da nepokritim elementom odštejemo ε , dvakrat pokritim pa prištejemo ε.
  - Zakaj se algoritem ustavi? Povezavam med S in T ne prištevamo/odštevamo — enkrat pokriti stolpci. Posledično ostanejo iste. Prav tako povezave med $X \setminus S$ in $Y \setminus T$ — enkrat pokrite vrstice. Tudi te ostanejo iste. Povezave med $X \setminus S$ in T izginejo do naslednje iteracije MM. To so namreč povezave z ničelno utežjo in prišteli smo jim ε. Povezave med S in $Y \setminus T$ pa so vse neničelne in ena ima utež ε (najmanjša utež). Njim odštejemo ε, torej do naslednje iteracije MM bo vsaj ena postala prosta povezava v ničelnem grafu. Imenujmo y konec te povezave, ki je v $Y \setminus T$. Ločimo dva primera:
    - Če je y prosto vozlišče: Ker do y pridemo po prosti povezavi iz S, ga damo v T. Sedaj je v T prosto vozlišče, torej smo našli novo povečujočo pot in s tem povečamo $|M|$.
    - Če je y vezano vozlišče: Ker do y pridemo po prosti povezavi iz S, ga damo v T. Sedaj je v T vezano vozlišče, vezano je pa z enim elementom iz $X \setminus S$ (ker ni vezanih povezav med $Y \setminus T$ in S (glej MM)),

recimo mu x. Torej lahko iz vozlišča v T pridemo preko vezane povezave do nekega vozlišča v X (x) in zato x damo v S.

- Torej se na vsakem koraku MMU poveča $|M|$ ali $|S|$. S se lahko poveča največ $n-$krat. Potem se mora povečati $|M|$. Slednji se lahko poveča največ $n-$krat. Torej MMU se gotovo zaključi po n^2 korakih MM, vsak korak MM pa potrebuje okoli n^2 operacij, torej je zahtevnost MMU $O\left(n^4\right)$.

Pripomba. MMU se da implementirati bolje — v $O\left(n^3\right)$.

Pripomba. Maksimalno popolno prirejanje rešimo tako, da rešimo minimalno popolno prirejanje za $-C$.

6 Najkrajše poti

V tem poglavju si bomo ogledali nekaj algoritmov za iskanje najkrajših poti v grafu.

6.1 BFS

Dan je neutežen graf $G = (V, E)$, $|V| = n$. Najti želimo najkrajšo pot od $r \in V$ do vsakega vozlišča. Imamo dve tabeli: tabelo razdalj d in tabelo predhodnikov na najkrajši poti π — obe dolžine n. Inicializiramo $\forall i \in [n] \setminus \{r\}$: $d_i := \infty$, $d_r = 0$. Imamo tudi množico vozlišč $A \subseteq [n]$, ki jih je treba pregledati v naslednjem koraku. Inicializiramo $A = \{r\}$.

- dokler $A \neq \emptyset$:
  - za vsak element $a \in A$:
    - $A := A \setminus \{a\}$
    - za vsakega $a-$jevega soseda s:
      - če je $d_a + 1 \leq d_s$, potem $d_s := d_a + 1$ in $\pi_s = a$ in $A := A \cup \{s\}$
- sedaj nam d_i ponazarja razdaljo najkrajše možne poti od r do i, s pomočjo π pa lahko to pot tudi očitno rekonstruiramo.

6.2 Dijkstra

Dan je nenegativno utežen graf $G = (V, E)$, $|V| = n$. Uteži so $(w_{ij})_{i\in[n],j\in[n]}$. Najti želimo najkrajšo pot od $r \in V$ do vsakega vozlišča. Imamo dve tabeli: tabelo razdalj d in tabelo predhodnikov na najkrajši poti π — obe dolžine n. Inicializiramo $\forall i \in [n] \setminus \{r\} : d_i := \infty$, $d_r = 0$. Hranimo tudi tabelo obdelanih vozlišč $A \subseteq [n]$. Inicializiramo $A = \emptyset$.

- Ponavljamo dokler $A \neq V$:
  - Izberemo vozlišče $i \in [n] \ni: i \notin A \land \forall j \in [n] : d_i \leq d_j$ ZDB neobdelano z najmanjšo razdaljo do r.
  - $A := A \cup \{i\}$
  - Za vsak $i-$jev sosed s:
    - če je $d_i + w_{is} < d_s$:
      - $d_s := w_i + w_{is}$
      - $\pi_s = i$
- Cene za vsako vozlišče v je cena $r, v-$poti v d_v. Najcenejšo pot lahko rekonstruiramo s tabelo π.

Korakov je največ toliko, kolikor je vozlišč. Na vsakem koraku pregledamo vse sosede — $O\left(|V|^2\right)$. Da se implementirati hitreje: $O(|E| \cdot \log|V|)$ ali $O(|E| + |V| \log|V|)$.

Dijkstra lahko da napačne odgovore na grafu z negativnimi utežmi. To je zato, ker se zanaša na trikotniško neenakost, torej $d_{ab} + d_{bc} \geq d_{ac}$, kar pa ni nujno res za grafe, ki dopuščajo negativne uteži.

6.3 Najkrajše poti v acikličnih grafih (DAG) — topološka ureditev

Naj bo G utežen usmerjen graf brez usmerjenega cikla. Uteži so lahko tudi negativne.

Definicija. Topološka ureditev je bijekcija $\varphi : V(G) \to [n] \ni: \forall ij \in E(G) : \varphi(i) < \varphi(j)$.

Da najdemo topološko ureditev, vzamemo vozlišče z vhodno stopnjo 0 kot prvo vozlišče. Odstranimo njegove povezave in nadaljujemo na preostanku grafa (torej spet najdemo vozlišče z vhodno stopnjo 0 in ga vzamemo kot drugo vozlišče, ...).

To ponavljamo, dokler nam v grafu ostanejo vozlišča, ki jim še ni bil dodeljen vrstni red.

Natanko tedaj ko graf ni acikličen, v nekem koraku ne bo več vozlišča z vhodno stopnjo 0, a bodo ostala neoštevilčena vozlišča.

Za topološko urejanje potrebujemo $O(|E| + |V|)$ operacij.

Sedaj iščemo najkrajše poti na topološko urejenem grafu takole:

- za vsak $i \in [n]$ po vrsti od najmanjšega do največjega:
  - za vsak $\varphi(i)$ –jev sosed s:
    * če je $d_{\varphi(i)} + w_{\varphi(i)s} < d_s$:
      · $d_s \coloneqq d_{\varphi(i)} + w_{\varphi(i)s}$
      · $\pi_s \coloneqq \varphi(i)$
- Sedaj nam d_i predstavlja ceno najcenejše poti od $\varphi(1)$ do i, za rekonstrukcijo te poti pa lahko uporabimo π.

Kompleksnost: $O(|V| + |E|)$

6.4 Bellman-Fordov algoritem

Naj bo G poljuben poljubno utežen (uteži so lahko tudi negativne) graf. Iščemo najkrajše poti od korena do vsakega vozlišča. Algoritem vrne napako, če je v grafu kak negativen cikel, do katerega lahko pridemo iz korena, sicer pa je največja možna dolžina najkrajše poti $|V| - 1$.

Začnemo z d in π kot prej. Postopek:

- $|V| - 1$–krat ponovimo:
  - Za vsako povezavo ij:
    * Če je $d_i + w_{ij} < d_j$:
      · $d_j = d_i + w_{ij}$
      · $\pi_j = i$
- Še enkrat preverimo vse povezave. Če se po $|V|$ korakih kak d_i spet zmanjša, vrnemo napako — v grafu je očitno negativen cikel.

Kompleksnost: $O(|V| \cdot |E|)$.

6.5 Floyd-Warshall

Naj bo G utežen DAG, uteži so lahko tudi negativne. Najde razdalje med vsemi pari točk oz. vrne napako, če obstaja kak negativen cikel. Naj bo $W = [w_{ij}]_{i,j\in[n]}$ cene so, kjer ni povezave, ∞. Na ničtem koraku: $d_{ij}^{(0)} \coloneqq w_{ij}$.

- za vsak $k \in [n]$ (korak):
  - za vsak $i \in [n]$:
    * za vsak $j \in [n]$:
      · $d_{ij}^{(k)} \coloneqq \min\left\{d_{ij}^{(k-1)} \text{ (}k\text{ ni vmesno vozlišče)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \text{ (}k\text{ je vmesno vozlišče)}\right\}$ — torej ob vsakem koraku za vsak par vozlišč preverimo, če je morebiti ceneje priti namesto obstoječe poti rajši še preko k.
      · komentar: $d_{ij}^{(k)}$ je najcenejša razdalja med i in j, če so vmesna vozlišča $\leq k$.
      · če $d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$ (če smo popravili pot): $\pi_{ij}^{(k)} \coloneqq \pi_{kj}^{k-1}$ sicer $\pi_{ij}^{(k)} \coloneqq \pi_{ij}^{(k-1)}$.

Kompleksnost: $O(n^3)$. $\pi_{ij}^{(k)}$ pomeni k–ti predhodnik na najkrajši poti od i do j.

7 Konveksna optimizacija

Gre za minimizacijo (opt je vedno min) konveksne funkcije na konveksni množici.

Definicija. Množica A je konveksna, če je za poljubna $x, y \in A$ cela daljica xy tudi v A.
Uradneje: Množica A je konveksna $\Leftrightarrow \forall x, y \in A \forall \lambda \in [0,1] : (1-\lambda)x + \lambda y \in A$

V konveksnih množicah se ni smiselno igrati skrivalnic. – Konvalinka, 2025.

Pripomba. Vse točke na premici skozi x in y so $x + \lambda(y-x) = (1-\lambda)x + \lambda y$ (tole je afina kombinacija — linearna kombinacija, kjer se skalarji seštejejo v 1) za $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vse točke na daljici xy so $(1-\lambda)x + \lambda y$ (tole je konveksna kombinacija — linearna kombinacija, kjer so skalarji nenegativni in se seštejejo v 1) za $\lambda \in [0,1]$.

Trditev. Presek (tudi neskončen) konveksnih množic je konveksen.

Dokaz. Naj bodo A_i, $i \in I$ konveksne. Dokažimo, da je $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ konveksna. Naj bodo $x, y \in A$, $\lambda \in [0,1]$, $i \in I$ poljubni. Tedaj $(1-\lambda)x + \lambda y \in A_i$, ker $x \in A_i$ (ker $x \in A$ in A je presek vseh). Ker je torej $(1-\lambda)x + \lambda y$ v poljubnem A_i, je v vsakem, zategadelj je tudi v preseku vseh — $(1-\lambda)x + \lambda y \in A$. $\square$

Definicija. Konveksna ogrinjača.

$$C(A) := \bigcap_{K \subseteq \mathbb{R}^n, K \text{ konv.}, A \subseteq K} K$$

Ta presek je gotovo neprazen, ker je vsaj $\mathbb{R}^n$ konveksna. Očitno je $C(A)$ konveksna, ker je presek konveksnih.

Definicija. $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ je konveksna kombinacija vektorjev $x_1, \ldots, x_k \Leftrightarrow \sum_{i\in[k]} \lambda_i = 1 \wedge \forall i \in [k] : \lambda_i \geq 0$.

Trditev. A konveksna $\Leftrightarrow$ konveksna kombinacija poljubnih vektorjev iz A je v A.

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

($\Leftarrow$) Očitno. Po definiciji konveksnosti je konveksna kombinacija poljubnih dveh vektorjev spet v A, kar seveda sledi iz tega, da je konveksna kombinacija poljubnih (in s tem poljubno mnogo, lahko tudi dveh) vektorjev iz A v A.

($\Rightarrow$) Z indukcijo na k (število vektorjev v konveksni kombinaciji poljubno vektorjev):

- Baza: $k = 1$ (konveksna kombinacija enega vektorja iz A je spet isti vektor in zato spet v A $(x \cdot 1 = x)$), $k = 2$ (konveksna kombinacija dveh vektorjev iz A je po definiciji konveksnosti spet v A).
- $k \geq 3$: $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$. Ker se morajo sešteti v 1, gotovo niso vsi koeficienti $\lambda_i = 1$. BSŠ $\lambda_k < 1$. Množimo in delimo z neničelnim $1 - \lambda_k$

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = (1-\lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}x_{k-1}\right) + \lambda_k x_k$$

  Sedaj smo dobili konveksno kombinacijo dveh vektorjev, $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}x_{k-1}$ in x_k. Po predpostavki velja, da je ta konveksna kombinacija dveh vektorjev v A, če je res, da je $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}x_{k-1}$ v A. To pa je v A po indukcijski predpostavki. Imamo $k-1$ vektorjev in imamo njihovo konveksno kombinacijo. Gotovo velja $\frac{\lambda_i \geq 0}{(1-\lambda_k)\geq 0} \geq 0$ za vsak i. Poleg tega $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_k)} = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}}{1-\lambda_k} = 1$, ker $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + \lambda_k = 1 \Longrightarrow \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} = 1 - \lambda_k$.

$\square$

Lema. *Če velja $A \subseteq B$ in B konveksna, potem $C(A) \subseteq B$. Ker se B pojavi v $\bigcap_{K\subseteq\mathbb{R}^n, K \text{ konv}, A\subseteq K} K$ (ustreza kriterijem za K), je $C(A) \subseteq B$.*

Trditev. $C(A) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \wedge \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 \wedge x_1, \ldots, x_k \in A\}$ na realnih vektorskih prostorih.

Dokaz. Dokazujemo enakost množic:

($\supseteq$) $x_1, \ldots, x_k \in A$. Ker je $C(A)$ presek samih množic, ki vsebujejo A, je $A \subseteq C(A)^{\text{konv.}}$. In po prejšnji trditvi je vsaka konveksna kombinacija vektorjev iz konveksne množice spet v tej konveksni množici.

($\subseteq$) Hočemo dokazati, da je konveksna ogrinjača vsebovana v tej množici. Pišimo $KK \coloneqq \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \wedge \lambda_1$
Po lemi je dovolj dokazati, da je $A \subseteq KK$ (ja, vsak vektor iz A je konveksna kombinacija enega vektorja iz A) in da je KK konveksna. Tedaj po lemi velja, da je $C(A) \subseteq KK$.

Dokažimo sedaj, da je konveksna kombinacija dveh vektorjev iz KK spet v KK. Vzemimo dva poljubna vektorja iz KK. Sta oblike $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ in $\mu_1 y_1 + \cdots + \mu_l y_l$ za $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_l \geq 0$ in $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ in $\sum_{i=1}^{l} \mu_i = 1$. Dokažimo, da je njuna konveksna kombinacija v KK. Naj bo $\lambda \in [0,1]$ poljuben:

$$(1-\lambda)(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) + \lambda(\mu_1 y_1 + \cdots + \mu_l y_l) = (1-\lambda)\lambda_1 x_1 + \cdots + (1-\lambda)\lambda_k x_k + \lambda\mu_1 y_1 + \cdots + \lambda\mu_l y_l$$

Velja $(1-\lambda)\lambda_1, \ldots, (1-\lambda)\lambda_k, \lambda\mu_1, \ldots, \lambda\mu_l \geq 0$. Velja tudi, da se koeficienti seštejejo v 1:

$$(1-\lambda)\lambda_1 + \cdots + (1-\lambda)\lambda_k + \lambda\mu_1 + \cdots \lambda\mu_l = (1-\lambda)(\overbrace{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}^{1}) + \lambda(\overbrace{\mu_1 + \cdots + \mu_l}^{1}) = (1-\lambda) + \lambda = 1$$

$\square$

Definicija. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna. $a \in A$ je ekstremna točka, če ni konveksna kombinacija dveh točk $x, y \in A$, $x, y \neq A$ ZDB $\nexists \lambda \in (0,1), x, y \in A, x, y \neq a : a = (1-\lambda)x + \lambda y$. ZDB $a \in A$ ni ekstremna točka, če jo je moč izraziti s konveksno kombinacijo kakšnih drugih točk iz A.

Zgled. Primer so oglišča trikotnika, torej množice $C(\{(0,0),(0,1),(1,0)\})$. Tu so ekstremne točke $\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. Recimo točka $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ni ekstremna.

Pripomba. Ekstremne točke so vedno robne. Niso pa vse robne točke ekstremne.

Definicija. $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ (prazna množica po dogovoru ni afina). A je afina, če $\forall x, y \in A, \lambda \in \mathbb{R} : (1-\lambda)x + \lambda y \in A$. Torej $x, y \in A \Rightarrow$ premica med x in y je v A.

Trditev. Imejmo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$. NTSE:

1. A je afina
2. vsaka afina kombinacija poljubnih vektorjev iz A je v A
3. $A = V + a = \{v + a; v \in V\}$ za linearen podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ in $a \in \mathbb{R}^n$.

Pripomba. Kaj so afine množice v $\mathbb{R}^3$? Premice, ravnine, singletoni, $\{\mathbb{R}^3\}$. Afinim množicam rečemo tudi afini podprostori.

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

(1) $\Rightarrow$ (2) Indukcija na k.

- Baza. $k = 1$ afina kombinacija enega vektorja je vektor sam, afina kombinacija dveh vektorjev je afina po predpostavki.
- $k \geq 3$. Imamo $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$. Ne morejo biti vsi $\lambda_i = 1$. BSŠ $\lambda_k \neq 1$.

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = (1-\lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_{k-1}} x_{k-1}\right) + \lambda_k x_k$$

je očitno enako. Množili in delili smo z neničelnim elementom. Po I. P. je $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} x_k \in A$, ker je afina kombinacija $k-1$ elementov iz A, ker $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}$. Torej je $(1-\lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} x_k\right) + \lambda_k x_k$ afina kombinacija dveh vektorjev iz A in zato po definiciji element A.

(2) $\Rightarrow$ (3) Po predpostavki je vsaka afina kombinacija vektorjev iz A v A. Želimo dokazati, da $A = V + a = \{v + a; v \in V\}$ za linearen podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ in $a \in \mathbb{R}^n$.

Opazimo, da če imamo V linearen podprostor in $V + a$ premaknjen linearen podprostor, bomo $V + a$ dobili, ne glede na to kateri element vzamemo za a, dokler ga vzamemo iz $V + a$. Torej lahko vzamemo recimo a ali pa $a + a$ ali pa $a + a + a$ ali pa $a + v$ za katerikoli element v iz V. Le izhodišče s tem prištevanjem slikamo v različne elemente glede na to, kaj vzamemo za prištevanje $V-$ju. Ampak tu nam je vseeno, kam se slika izhodišče, zanima nas le cel prostor kot množica.

Torej vzemimo $a \in A$ poljuben. Po zgornjem razmisleku je vseeno, kateri element iz A vzamemo, v vsakem primeru dobimo za a premaknjen vektorski prostor. Sedaj moramo pokazati, da je A res oblike $V + a$ za nek V linearen podprostor. Najprej moramo najti V. Vzemimo $V \coloneqq A - a$.

Seveda če vzamemo poljuben afin podprostor in odštejemo poljuben element od njega, dobimo linearen podprostor. Recimo za primer lahko vzamemo ravnino v $\mathbb{R}^3$ in od vseh elementov odštejemo en element iz te ravnine. Dobimo ravnino, ki vsebuje izhodišče.

Treba je pokazati še, da je V linearen podprostor in da je $V + a = A$ (slednje je očitno po definiciji V).

V je linearen podprostor, če $\forall u, v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda u + \mu v \in V$. Elementi V so oblike $x - a$, kjer je x element iz A. ZDB $X = \{x - a; x \in A\}$ (a smo fiksirali zgoraj). Vzemimo torej poljubna $x - a$ in $y - a$. Dokažimo, da je $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda (x - a) + \mu (x - y) \in V$ („$\in V$“ pomeni, da je oblike $\check{z} - a$ za nek $\check{z}$). Naj bosta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ poljubna.

$$\lambda (x - a) + \mu (x - y) = \lambda x - \lambda a + \mu x - \mu y = \lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu) a - a$$

$\lambda x + \mu y + (1 - \lambda - \mu) a \in A$, ker je afina kombinacija vektorjev x, y in a. Koeficienti se seštejejo v 1: $\lambda + \mu + (1 - \lambda - \mu) = 1$. Torej je, ko odštejemo a, to element V (ker $V = A - a$).

Torej je V linearen podprostor

(3) $\Rightarrow$ (1) Po predpostavki je $A = V + a$ za $a \in \mathbb{R}^n$ in V linearen podprostor v $\mathbb{R}^n$. Hočemo dokazati, da je A afina — da je $\forall x, y \in A, \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda) x + \lambda y \in A$. Elementi A so oblike $x + a$ za x iz V (a smo fiksirali) ZDB $A = \{x + a; x \in V\}$. Torej za $\forall x, y \in A, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$(1 - \lambda) (x + a) + \lambda (y + a) = (1 - \lambda) x + \lambda y + (1 - \lambda) a + \lambda a = (1 - \lambda) x + \lambda y + a$$

Želimo, da je $(1 - \lambda) x + \lambda y + a \in A$, torej želimo, da je $(1 - \lambda) x + \lambda y \in V$, kar pa je res, ker je V linearen podprostor in zato vsebuje vse linearne kombinacije svojih elementov.

$\square$

7.1 Konveksni stožci in Farkaseva [farkaševa] lema.

Definicija. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksni stožec, če $\forall x, y \in A, \lambda, \mu \geq 0 : \lambda x + \mu y \in A$.

Pripomba. Imejmo $x, y \in A$.

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda x + \mu y \in A \Leftrightarrow A$ je (linearen) podprostor
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda) x + \lambda y \in A \Leftrightarrow A$ je afin podprostor
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 : (1 - \lambda) x + \lambda y \in A \Leftrightarrow A$ je konveksna množica
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \geq 0 : \lambda x + \mu y \in A \Leftrightarrow A$ je konveksni stožec

Zgled. Primer konveksnega stožca v $\mathbb{R}^2$ je vse, kar je med dvema poltrakoma z izhodiščem v 0. Vse nenegativne linearne kombinacije dveh točk tega območja so v tej množici.

Zgled. Neskončen stožec v $\mathbb{R}^3$. Končen kornet v $\mathbb{R}^3$ pa ni konveksni stožec (pa čeprav je konveksna množica).

Pripomba. Velja, da je konveksni stožec nujno konveksna množica. Razvidno iz definicij pojmov zgoraj.
Vsak linearen podprostor je afin in konveksen stožec in konveksna množica.
Vsak afin prostor je konveksna množica.

Definicija. Naj bo $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$. $s(a_1, \dots, a_k) \coloneqq \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0\}$ ZDB množica vseh nenegativnih linearnih kombinacij danih vektorjev. Temu pravimo konveksni stožec, **napet na vektorje** $a_1, \dots, a_k$.

Zgled. Imejmo dva vektorja, a_1 in a_2 v $\mathbb{R}^2$. Konveksni stožec, napet med a_1 in a_2, je vse, kar je med vektorjema a_1 in a_2, če ju poljubno skaliramo — $s(a_1, a_2)$.

Konveksni stožec, napet med a_1, a_2 in a_3 v $\mathbb{R}^3$, je vse, kar je med temi tremi vektorji, če jih lahko poljubno skaliramo — $s(a_1, a_2, a_3)$. Taka neskončno velika tristrana piramida z vrhom v $(0, 0, 0)$. Tak neskončen trikoten kornet.

Trditev. $s(a_1, \ldots, a_k)$ je konveksni stožec.

Dokaz. Vzemimo dva elementa iz konveksnega stožca, razpetega med $a_1, \ldots, a_k$ in ju skalirajmo s poljubnima nenegativnima realnima številoma. Dokazati želimo, da je rezultat te operacije vsebovan v $s(a_1, \ldots, a_k)$. Naj bosta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \geq 0$ poljubna:

$$\lambda(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k) + \mu(\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_k a_k) = \cdots$$

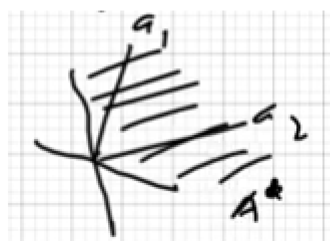
... velja, da so $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_k$ po definiciji konveksnega stožca, napetega na vektorje, nenegativni in realni ...

$$\cdots = (\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1) a_1 + \cdots + (\lambda\lambda_k + \mu\mu_k) a_k$$

In $\forall i \in [k]$ velja $\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 \geq 0$, saj je vsota dveh produktov nenegativnih števil. □

Definicija. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je poljubna podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Dualni stožec množice A je $A^* := \left\{x \in \mathbb{R}^n; \forall a \in A : x^T a \geq 0\right\}$ ZDB to so vsi vektorji, katerih skalarni produkt z vsemi elementi A je nenegativen $\sim$ to so vsi vektorji, ki z vsemi vektorji iz A tvorijo netopi kot (ostri ali pravi).

Zgled. Denimo, da je $A = \{a_1, a_2\}$ v $\mathbb{R}^2$:



Slika 3: Primer dualnega stožca.

Trditev. A^* je konveksni stožec.

Dokaz. Naj bodo $x, y \in A^*, \lambda, \mu \geq 0, a \in A$ poljubni.

$$(\lambda x + \mu y)^T a \overset{\text{linearnost}}{=} \overset{\geq 0}{\lambda} \overset{\geq 0}{x^T a} + \overset{\geq 0}{\mu} \overset{\geq 0}{y^T a} \geq 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in A^*$$

□

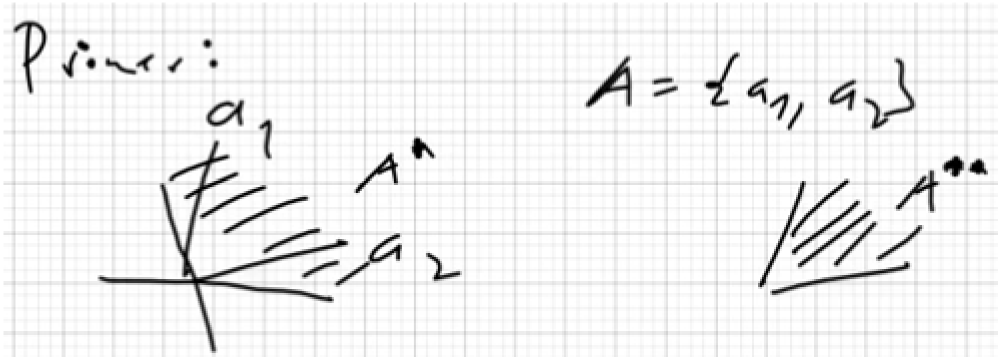
Trditev. $A \subseteq (A^*)^*$.

Dokaz. Naj bo $a \in A$ poljuben. $a \in (A^*)^* \Leftrightarrow \forall b \in A^* : a^T b \geq 0$. A je res, da če vzamemo vektor iz a in vektor iz A^*, je med njima ostri kot? Da, po definiciji A^*. □

Pripomba. V splošnem $A \neq (A^*)^*$. Recimo če A ni konveksni stožec gotovo ne more biti $(A^*)^*$, ki je konveksni stožec.

Izrek. *Farkaševa lema, geometrijska oblika:* $(s(a_1, \ldots, a_k))^{**} = s(a_1, \ldots, a_k)$.

Zgled. Za dva vektorja je očitno:



Slika 4: Primer farkaševe leme za $A = \{a_1, a_2\}$ v $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Dokazujemo enakost množic.

($\supseteq$) Že vemo. $\forall A : A \subseteq A^{**}$ smo že dokazali.

($\subseteq$) Vzemimo poljuben element $b \in s(a_1, \ldots, a_k)^{**}$. $s(a_1, \ldots, a_k)$ je množica vseh nenegativnih linearnih kombinacij teh vektorjev. Radi bi dokazali $b \in s(a_1, \ldots, a_k) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \ni: \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = b$. Definirajmo matriko $A := \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Linearna kombinacija stolpcev matrike je $A\lambda$. Torej $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \ni: \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = b \Leftrightarrow \exists x \geq 0 \ni: Ax = b$.

Kaj pa pomeni predpostavka? Da je skalarni produkt $\forall y \in s^*(a_1, \ldots, a_k) : b^T y \geq 0$. Trdimo, da je $y \in s^*(a_1, \ldots, a_k) \Leftrightarrow A^T y \geq 0$.

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco:

($\Rightarrow$) Po predpostavki y tvori ostri kot z vsakim iz $s(a_1, \ldots, a_k)$. Dokažimo, da to vodi v $A^T y \geq 0$:

$$A^T y = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_k^T \end{bmatrix} y \geq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [k] : a_i^T y \geq 0$$

To je res — y tvori ostri kot z vsakim elementom, ki je linearna kombinacija $\{a_1, \ldots, a_k\}$ z nenegativnimi koeficienti, a_i pa seveda je element te množice; kot linearno kombinacijo z nenegativnimi koeficienti ga lahko zapišemo takole: $0 \cdot a_1 + \cdots + 0 \cdot a_{i-1} + 1 \cdot a_i + 0 \cdot a_{i+1} + \cdots + 0 \cdot a_k$.

($\Leftarrow$) Po predpostavki $A^T y \geq 0 \Leftrightarrow \forall i \in [k] : a_i^T y \geq 0$. Želimo dokazati, da y tvori ostri kot z vsakim elementom, ki je linearna kombinacija $\{a_1, \ldots, a_k\}$ z nenegativnimi koeficienti — z vsakim vektorjem iz $s(a_1, \ldots, a_k)$. To so vektorji $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k)^T y = \overset{\geq 0}{\lambda_1} \overset{\geq 0}{a_1^T y} + \cdots + \overset{\geq 0}{\lambda_k} \overset{\geq 0}{a_k^T y} \geq 0$. Ekvivalenca torej drži.

Torej: Če je $A^T y \geq 0$, je $b^T y \geq 0$ (predpostavka). Radi bi videli, da $\exists x \geq 0 \ni: Ax = b$. To so linearni pogoji. Ali obstaja dopusten x za te pogoje? Prevedemo na linearni program — tem pogojem dodamo eno brezvezno kriterijsko funkcijo: $\max 0^T x$ p. p. $Ax = b, x \geq 0$. Radi bi dokazali, da je ta linearni program dopusten $\Leftrightarrow$ LP je optimalen (ker je kriterijska funkcija konstantna 0) $\overset{\text{KID}}{\Leftrightarrow}$ dual je optimalen.

Dual tega problema pa je $\min b^T y$ p. p. $A^T y \geq 0$, $y \lesseqgtr 0$. Dokazati je treba, da je ta dual optimalen. Dopusten je, ker $y = 0$. Dopustni se delijo na neomejene in optimalne. Dokažimo, da dual ni neomejen in je s tem dopusten. Ni neomejen, ker je po predpostavki $b^T y \geq 0$ za vsak y, kjer $A^T y \geq 0$.

Torej je dual optimalen in po KID je optimalen tudi prvoten problem, torej je dopusten. $\square$

$\square$

Pripomba. Izkaže se, da se iz Farkaseve leme da dokazati KID. Torej KID ni potreben za Farkasevo lemo. Torej sta nekako KID in Farkaseva lema podobna/ekvivalentna.

Izrek. *Farkaseva lema (algebraična oblika):* $\exists x \geq 0 \ni: Ax = b \Leftrightarrow \forall y: \left(A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y = 0\right)$.
Opazimo, da je to isto kot $b \in s(a_1, \ldots, a_k) \Leftrightarrow b \in s^{**}(a_1, \ldots, a_k)$.

Izrek. *Farkaseva lema (algebraična oblika, druga varianta):* $\exists x \geq 0 : Ax \leq b \Leftrightarrow \forall y \geq 0 : \left(A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0\right)$.

Dokaz. Skica dokaza: Kdaj obstaja tak x? Takrat, ko je dopusten naslednji linearni program: $\max 0^T x$ p. p. $Ax \leq b, x \geq 0$. Dopusten je natanko tedaj, ko je optimalen, optimalen je natanko tedaj, ko je optimalen dual (KID): $\min b^T y$ p. p. $A^T y \geq 0, y \geq 0$. Slednje je dopusten problem ($y = 0$), torej je bodisi optimalen bodisi neomejen. Neomejen ni, ker je po predpostavki za vsak dopusten y ($A^T y \geq 0$) kriterijska funkcija omejena navzdol ($b^T y \geq 0$). □

Zgled. Ali obstajata x_1, x_2, da velja

$$x_1 - x_2 \leq -1 \qquad / \cdot 1$$
$$-x_1 - x_2 \leq -3 \qquad / \cdot 3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2 \qquad / \cdot 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zmnožimo neenačbe s temi nenegativnimi koeficienti in dobimo certifikat nedopustnosti: $6x_1 \leq -2$, kar je v protislovju z $x_1 \geq 0$.

Pripomba. Še ena interpretacija Farkaseve leme: $b \notin s(a_1, \ldots, a_k) \Rightarrow b \notin s^{**}(a_1, \ldots, a_k)$ ZDB če b ni v konveksnem stožcu, napetem na $a_1, \ldots, a_k$, potem b od $a_1, \ldots, a_k$ loči neka hiperravnina.

8 Konveksne funkcije

Definicija. Naj bo K konveksna na $\mathbb{R}^n$. $f : K \to \mathbb{R}$ je konveksna, če $\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1] : f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$.

Zgled. $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$((1-\lambda)x + \lambda y)^2 \overset{?}{\leq} (1-\lambda)x^2 + \lambda y^2$$
$$0 \overset{?}{\leq} (1-\lambda)x^2 + \lambda y^2 - ((1-\lambda)x + \lambda y)^2$$
$$0 \overset{?}{\leq} (1-\lambda)x^2 + \lambda y^2 - (1-\lambda)^2 x^2 - 2(1-\lambda)x\lambda y - \lambda^2 y^2$$
$$0 \overset{?}{\leq} \left(1 - \lambda - \left(1 - 2\lambda + \lambda^2\right)\right)x^2 + (1-\lambda)\lambda y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy$$
$$0 \overset{?}{\leq} (1-\lambda)\lambda x^2 + (1-\lambda)\lambda y^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy$$

če je $\lambda = 0$, je $0 \leq 0$, če je $1 - \lambda = 0$, je $0 \leq 0$. Če je $\lambda \in (0, 1)$, delimo z $\lambda(1 - \lambda)$

$$0 \overset{?}{\leq} x^2 + y^2 - xy$$
$$0 \leq \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

Torej je x^2 res konveksna. To isto lastnost tudi vidimo iz grafa funkcije; graf je vedno pod zveznico med dvema točkama na grafu.

Definicija. Naj bo K konveksna $\subseteq \mathbb{R}^n$. $f : K \to \mathbb{R}$ je konkavna, če $\forall x, y \in K, \lambda \in [0, 1] : f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$.

Definicija. Naj bo K konveksna $\subseteq \mathbb{R}^n$. $f : K \to \mathbb{R}$ je strogo konveksna, če $\forall x, y \in K, \lambda \in (0, 1) : f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$.

Definicija. Naj bo K konveksna $\subseteq \mathbb{R}^n$. $f : K \to \mathbb{R}$ je strogo konkavna, če $\forall x, y \in K, \lambda \in (0, 1) : f((1 - \lambda)x + \lambda y) > (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y)$.

Zgled. Naj bo $f(x) = a^T x + b = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b$ (afina funkcija) (linearna+konstanta). Je konveksna in konkavna hkrati (velja enakost):

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = a^T((1-\lambda)x + \lambda y) + b = (1-\lambda)a^T x + \lambda a^T y + b = (1-\lambda)a^T x + \lambda a^T y + (1-\lambda)b + \lambda b =$$

$$= (1-\lambda)\left(a^T x + b\right) + \lambda\left(a^T y + b\right) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Trditev. Naj bo $f : K^{\text{konkveksna}} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Naj bo $b \in \mathbb{R}$ poljuben. Naj bo $A = \{x \in K : f(x) \le b\}$. Tedaj je A konveksna.

Dokaz. Vzemimo poljubna $x, y \in A, \lambda \in [0,1]$. Dokazati želimo $(1-\lambda)x + \lambda y \in A \Leftrightarrow f((1-\lambda)x + \lambda y) \le b$ (zaradi konveksnosti K je f na tem izrazu definirana).

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \overset{f \text{ konv}}{\le} \overset{\ge 0}{(1-\lambda)}\overset{\le b}{f(x)} + \overset{\ge 0}{\lambda}\,\overset{\le b}{f(y)} \le (1-\lambda)b + \lambda b = b$$

□

Trditev. Trdimo naslednje:

1. $f, g : K^{\text{konv.}} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija
   (a) $\implies f + g$ konveksna funkcija
   (b) $\forall c \ge 0 : c \cdot f$ konveksna funkcija.
2. $g : K^{\text{konv.}} \to \mathbb{R}$ afina
   (a) $\implies g_*(K)$ konveksna in
   (b) $f : g_*(K) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija $\implies f \circ g$ konveksna.
3. Naj bosta $g : K \to \mathbb{R}$ in $f : C(g_*(K)) \to \mathbb{R}$ konveksni in naj bo f naraščajoča. $\implies f \circ g$ konveksna.

Dokaz. Dokazujemo več trditev.

1. Dokazujemo dve trditvi:
   (a) $f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ in $g((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)$ velja po predpostavki. Seštejemo ti dve neenačbi:

   $$(f+g)((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)(f+g)(x) + \lambda(f+g)(y)$$

   (b) $f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ velja po predpostavki. Pomnožimo neenakost z nenegativnim c:

   $$cf((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)cf(x) + \lambda cf(y)$$

   Torej je tudi cf konveksna.
2. Dokazujemo dve trditvi:
   (a) Slika afine funkcije je konveksna množica. Naj bosta $x, y \in g_*(K)$. Torej $x = g(x') = a^T x' + b$ in $y = g(y') = a^T y' + b$.

   $$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\left(a^T x' + b\right) + \lambda\left(a^T y' + b\right) = (1-\lambda)a^T x' + (1-\lambda)b + \lambda a^T y' + \lambda b =$$

   $$= a^T((1-\lambda)x' + \lambda y') + (1-\lambda)b + \lambda b = a^T((1-\lambda)x' + \lambda y') + b = g((1-\lambda)x' + \lambda y') \in g_*(K)$$

   (b)

   $$(f \circ g)((1-\lambda)x + \lambda y) \overset{g \text{ afina}}{=} f((1-\lambda)g(x) + \lambda g(y)) \overset{f \text{ konv.}}{\le} (1-\lambda)f(g(x)) + \lambda f(g(y)) =$$

   $$= (1-\lambda)(f \circ g)(x) + \lambda(f \circ g)(y)$$
3. Po predpostavki velja $g : K \to \mathbb{R}$, $f : C(g_*(K)) \to \mathbb{R}$ konveksni in f naraščajoča. Dokazati želimo, da je $f \circ g$ konveksna. Vemo, da je g konveksna, se pravi $g((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(g) + \lambda g(y)$ (I.).

   $$(f \circ g)((1-\lambda)x + \lambda y) \overset{f \text{ naraščajoča} \wedge \text{I.}}{\le} f((1-\lambda)f(g) + \lambda g(y)) \overset{f \text{ konveksna}}{\le} (1-\lambda)f(g(x)) + \lambda f(g(y))$$

$\square$

Zgled. Ne-primeri:

- $c \cdot f$ ni nujno konveksna. Primer: $f(x) = x^2$ in $c = -1$.
- $f \cdot g$ ni nujno konveksna. Primer $f(x) = x^2$ in $g(x) = -1$.
- $f \circ g$ ni nujno konveksna. Primer: $g(x) = x^2$ in $f(x) = -x$.
- $f_*(K)$ ni nujno konveksna. $f : [0,1] \to \{0,1\}$ s predpisom $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$ je konveksna, a slika v $\{0,1\}$.

8.1 Kriterija prvega in drugega odvoda

Za $n = 1$. Prvi odvod: Funkcija je konveksna, če je graf nad tangento, torej če je $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$. Oziroma povedano z drugim odvodom: $\forall x \in K : f''(x) \geq 0$. Slabost je, da potrebujemo odvedljivost.

Definicija. Gradient funkcije $f : \Omega^{\text{odp.}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Izrek. *Kriterij 1. odvoda. Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta in konveksna in f parcialno odvedljiva (t. j. $\forall i \in [n] \, \exists \frac{\partial f}{\partial x_i} : f \to \mathbb{R}$). Tedaj je f konveksna*

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in K : f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))^T (y - x)$$

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco.

$(\Leftarrow)$: $\forall x, y \in K, \lambda \in [0,1]$: Velja $z \coloneqq (1-\lambda)x + \lambda y \in K$ in po predpostavki velja dvoje:

$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(x)^T (x - z)$$

$$f(y) \geq f(z) + \nabla f(x)^T (y - z)$$

Naredimo konveksno kombinacijo teh dveh neenačb — množimo z nenegativnimi števili, zato se ohrani smer neenačbe:

$$(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq (1-\lambda) \Big(f(z) + \nabla f(x)^T (x - z) \Big) + \lambda \Big(f(z) + \nabla f(x)^T (y - z) \Big)$$

$$(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq (1-\lambda) f(z) + (1-\lambda) \nabla f(x)^T (x - z) + \lambda f(z) + \lambda \nabla f(x)^T (y - z)$$

$$(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq (1-\lambda) f(z) + \lambda f(z) + (1-\lambda) \nabla f(x)^T (x - z) + \lambda \nabla f(x)^T (y - z)$$

$$(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq f(z) + \nabla f(x)^T ((1-\lambda)(x - z) + \lambda (y - z))$$

$$(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq f(z) + \nabla f(x)^T ((1-\lambda) x - (1-\lambda) z + \lambda y - \lambda z)$$

$$(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq f(z) + \cancel{\nabla f(x)^T ((1-\lambda) x + \lambda y - z)}$$

Upoštevamo $z = (1-\lambda) x + \lambda y$

$$(1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq f((1-\lambda) x + \lambda y)$$

$(\Rightarrow)$: Po predpostavki velja, da je f konveksna. Želimo dokazati, da je $\forall x, y \in K : f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))^T (y - x)$. Vzemimo poljubna $x, y \in K$. Ker je K konveksna, je $\forall \lambda \in [0,1] : (1-\lambda)x + \lambda y \in K$. Nadalje trdimo še več; da $\exists \delta > 0 \forall \lambda \in (-\delta, 1+\delta) : (1-\lambda)x + \lambda y \in K$ — to je res, ker je K odprta in konveksna. Podrobnejši dokaz:

Vemo, da $\exists \varepsilon_1 > 0 \ni$: $K_{\varepsilon_1}(x) \subseteq K$ (krogla z radijem ε in središčem v x je v K). Vemo tudi, da $\exists \varepsilon_2 > 0 \ni$: $K_{\varepsilon_2}(y) \subseteq y$. To dvoje zaradi odprtosti K. Oglejmo si razdaljo med $(1-\lambda)x + \lambda y$ in x: $||(1-\lambda)x + \lambda y - x|| = ||\lambda(y-x)|| = |\lambda|\,||y-x|| < \varepsilon_1$ za $|\lambda| < \frac{\varepsilon_1}{||y-x||}$. Torej če je $|\lambda| < \frac{\varepsilon_1}{||y-x||}$, potem je $(1-\lambda)x + \lambda y$ res v K. Sedaj si oglejmo še razdaljo med $(1-\lambda)x + \lambda y$ in y: $||(1-\lambda)x + \lambda y - y|| = ||(1-\lambda)x + (\lambda - 1)y|| = ||(1-\lambda)(x-y)|| = |1-\lambda|\,||x-y|| < \varepsilon_2$ za $|1-\lambda| < \frac{\varepsilon_2}{||x-y||}$. Če torej vzamemo $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon_1}{||y-x||}, \frac{\varepsilon_2}{||x-y||}\right\}$, bo res $\forall \lambda \in (-\delta, 1+\delta) : (1-\lambda)x + \lambda y \in K$.

Definirajmo funkcijo $g : (-\delta, 1+\delta)$ s predpisom $g(\lambda) = (1-\lambda)x + \lambda y$. Sedaj si oglejmo $f \circ g : (-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}$ in njen odvod — pomni, da je f funkcija več spremenljivk: $f((1-\lambda)x + \lambda y) = f((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, \ldots, (1-\lambda)x_n + \lambda y_n)$ — uporabimo verižno pravilo:

$$(f \circ g)'(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f((1-\lambda)x + \lambda y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}((1-\lambda)x_i + \lambda y_i) \cdot \begin{pmatrix} \text{odvod argumenta po } \lambda \\ y_i. - x_i \end{pmatrix}$$

Kar dobimo, je skalarni produkt gradienta in razlike med vektorjema. Obetavno. Sedaj to evaluiramo v $\lambda = 0$:

$$(f \circ g)'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\cancelto{x_i}{(1-0)\,x_i + 0y_i}) \cdot \begin{pmatrix} \text{odvod argumenta po } \lambda \\ y_i. - x_i \end{pmatrix} = (\nabla f(x))^T \cdot (y - x)$$

Po definiciji odvoda pa je: (tu uporabimo dejstvo, da ker limita obstaja, je enaka desni limiti)

$$(f \circ g)'(0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{(f \circ g)(\lambda) - (f \circ g)(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{(f \circ g)(\lambda) - (f \circ g)(0)}{\lambda} =$$

Ker je f konveksna:

$$= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f((1-\lambda)x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} \overset{f \text{ konv.}}{\leq} \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{(\cancel{1} - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \cancel{- f(x)}}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{-\cancel{\lambda} f(x) + \cancel{\lambda} f(y)}{\cancelto{1}{\lambda}} = f(y) - f(x)$$

Se pravi smo dokazali $f(y) - f(x) \geq (\nabla f(x))^T \cdot (y - x)$.

□

Izrek. *Kriterij 2. odvoda za $n = 1$. Naj bo $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva. Tedaj je f konveksna $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b)$: $f''(x) \geq 0$.*

Dokaz. Dokazujemo ekvivalenco:

$(\Rightarrow)$ Po predpostavki je f konveksna, torej $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. To uporabimo za $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = x + h$, $y = x - h$. Dobimo

$$f\left(\frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)\right) \leq \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h)$$

$$f(x) \leq \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h)$$

Izračunajmo spodnjo limito in dokažimo, da zares obstaja. Obe strani gresta k 0, uporabimo L'H:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) \cdot 1 + f'(x-h) \cdot (-1) \cancel{- 2f'(x) \cdot 0}}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) \cdot 1 - f''(x-h) \cdot (-1)}{2} = \lim_{h \to 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x)$$

Prej smo pokazali $f(x) \leq \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h)$ oziroma $0 \leq \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h) - f(x)$ oziroma $0 \leq f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$. Sedaj to uporabimo, da povemo, da je števec v spodnjem izračunu ≥ 0 in zato cela limita ≥ 0.

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0}{h^2 \geq 0} = f''(x)$$

($\Leftarrow$) Sedaj je predpostavka, da je $\forall x \in (a,b) : f''(x) \geq 0$. Dokazati želimo, da je f konveksna. Vzemimo poljubna $x, y \in (a,b)$. BSŠ $x < y$. Naj bo $\lambda \in (0,1)$ poljuben in naj bo $z = (1-\lambda)x + \lambda y$.

Spomnimo se Lagrangevega izreka[1]:

$$\exists \xi_1 \in (x,z) \ni: \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi_1) \quad \wedge \quad \exists \xi_2 \in (z,y) \ni: \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(\xi_2)$$

Po naši predpostavki je $f''(x) > 0$, zato je $f'(x)$ naraščajoča, zato je $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. Oziroma drugače,

$$\exists \xi_3 \in (\xi_1, \xi_2) \ni: \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1>0} = f''(\xi_3) \geq 0 \Longrightarrow f'(\xi_2)-f'(\xi_1) \geq 0$$

Torej smo dokazali, da je

$$\begin{gathered}
\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \qquad / \cdot (z-x)(y-z) \\
(f(z)-f(x))(y-z) \leq (f(y)-f(z))(z-x) \\
0 \leq (f(y)-f(z))(z-x) - (f(z)-f(x))(y-z) \\
0 \leq f(y)(z-x) - f(z)(z-x) - f(z)(y-z) + f(x)(y-z) \\
0 \leq f(y)(z-x) - f(z)[(z-x)+(y-z)] + f(x)(y-z) \\
0 \leq f(y)(z-x) - f(z)(y-x) + f(x)(y-z) \\
f(z)(y-x) \leq f(y)(z-x) + f(x)(y-z) \\
f(z) \leq f(y)\frac{z-x}{y-x} + f(x)\frac{y-z}{y-x}
\end{gathered}$$

Računamo:

$$\frac{y-z}{y-x} = \frac{y-(1-\lambda)x-\lambda y}{y-x} = \frac{(1-\lambda)y-(1-\lambda)x}{y-x} = \frac{(1-\lambda)\cancel{(y-x)}}{\cancel{y-x}} = 1-\lambda$$

$$\frac{z-x}{y-x} = \frac{(1-\lambda)x+\lambda y - x}{y-x} = \frac{\cancel{x}-\lambda x+\lambda y\cancel{-x}}{y-x} = \frac{\lambda\cancel{(y-x)}}{\cancel{y-x}} = \lambda$$

Ko vstavimo to nazaj v naš račun, dobimo:

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

S čimer smo dokazali konveksnost.

$\square$

Definicija. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Tedaj je x lastni vektor in λ lastna vrednost A. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$.

Definicija. A je diagonalizabilna, če $\exists n$ linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Zgled. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ni diagonalizabilna. Njen karakteristični polinom: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$, $\lambda = 0$ je edina njena lastna vrednost. Njeni lastni vektorji: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$. Sistem enačb $\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ velja natanko tedaj, ko je $y = 0$. Torej lastni vektorji so $\left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}; x \neq 0\right\}$ — ima samo en linearno neodvisen lastni vektor, torej ni diagonalizabilna.

Zgled. Lastne vrednosti readlne matrike so lahko kompleksne. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ je realna matrika s kompleksnimi lastnimi vrednostmi, zato ni diagonalizabilna. $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$.

[1] http://splet.sijanec.eu/dir/ana1teor.pdf

Definicija. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je simetrična $\Leftrightarrow A^T = A$.

Izrek. *Za A simetrično velja:*

1. *Lastne vrednosti so realne*
2. *Lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so ortogonalni*
3. *A je diagonalizabilna celo v ortonormirani bazi*

Dokaz. Dokazujemo več stvari.

1. $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^n$. $\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T (\lambda x) = \lambda \overline{x}^T x = \lambda \|x\|^2$. Ker je $A = A^T$, velja tudi $\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \overline{A}^T x = \overline{Ax}^T x = \overline{\lambda x}^T x = \overline{\lambda} \|x\|^2$. Ker $x \neq 0$, sledi $\lambda = \overline{\lambda}$ in zato $\lambda \in R$.

2. $Ax = \lambda x$, $\lambda \in R$, $x \in \mathbb{R}^n$, $Ay = \mu y$, $\mu \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$. Po predpostavki $\mu \neq \lambda$. Velja:
$$y^T Ax = y^T (\lambda x) = \lambda y^T x$$
$$y^T Ax = y^T A^T x$$
$$y^T A^T x = (Ay)^T x = (\mu y)^T x = \mu y^T x$$
$$\Longrightarrow \lambda y^T x = \mu y^T x \Rightarrow \left(\overset{\neq 0}{\lambda - \mu}\right) y^T x = 0 \Rightarrow y^T x = 0$$

3. A gotovo ima lastno vrednost $\in \mathbb{R}$ in pripadajoči lastni vektor x. Vzemimo vse vektorje, ki so pravokotni na x:
$$V \coloneqq \left\{y \in \mathbb{R}^n; x^T y = 0\right\}$$
Iz tega sledi, da je $y \in V$ (torej $x^T y = 0$) $\Rightarrow Ay \in V$ (torej $Ax^T y = 0$). Z drugimi besedami, V je invarianten za A. Po predpostavki $x^T y = 0 \Rightarrow x^T Ay = x^T A^T y = (Ax)^T y = (\lambda x)^T y = \lambda x^T y 0$. Zožimo $A|V$ in ta matrika je spet simetrična in nadaljujemo. NE RAZUMEM.

$\square$

Definicija. Diagonalizabilnost A ZDB pomeni, da $\exists$ obrnljiva P in diagonalna $D \in \mathbb{C}^{n \times n} \ni$: $A = PDP^{-1}$. Za simetrično $A = A^T$ velja pa $A = QDQ^T$ za $Q^T = Q^{-1}$ (ortogonalna matrika).

Definicija. Kvadratna forma:
$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Definicija. Simetrična A je pozitivno semidefinitna (oznaka $A \geq 0$), če je $\forall x \geq 0 : x^T Ax \geq 0$.
A je negativno semidefinitna (oznaka $A \leq 0$), če je $\forall x \geq 0 : x^T Ax \leq 0$.
A je pozitivno definitna (oznaka $A > 0$), če je $\forall x \geq 0 : x^T Ax > 0$.
A je negativno definitna (oznaka $A < 0$), če je $\forall x \geq 0 : x^T Ax < 0$.
A je nedefinitna, če $x^T Ax$ doseže tako pozitivne kot negativne vrednosti.

Dejstvo. *Velja: $x^T Ax = x^T QDQ^T x$, označimo $\tilde{x} \coloneqq Q^T x$, torej $x^T QDQ^T x = \tilde{x}^T D \tilde{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{x}_i^2$. Iz tega sledi tole o poddeterminantah (brez dokaza).*
$$\forall x \geq 0 : x^T Ax \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow \forall I \subseteq [n] : \det \left[A_{ij}\right]_{i,j \in I} \geq 0$$
$$\forall x \geq 0, x \neq 0 : x^T Ax > 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow \forall I \subseteq [n] : \det \left[A_{ij}\right]_{i,j \in I} > 0$$
in podobno za negativno (semi)definitnost.

Zgled.
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 > 0 \wedge \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow (\text{sled}\,(A) = a + c) > 0 \wedge \det A > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge ac - b^2 > 0$$

Definicija. Naj bo $f : K^{\text{odp.}} \to \mathbb{R}$ dvakrat parcialno odvedljiva, $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Gradient smo že definirali. Hessejeva matrika za f:

$$H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right]_{ij \in [n]}$$

Vemo, da je za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f_{xy} = f_{yx}$, zato je za take funkcije H_f simetrična — $H_f = H_f^T$.

Izrek. *Kriterij 2. odvoda za $n \geq 1$*

Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$, K konveksna in odprta, f dvakrat zvezno odvedljiva ZDB $f \in C_2(K)$. Tedaj je f konveksna $\Leftrightarrow \forall x \in K : H_f(x) \geq 0$.

Zgled. $f(x,y) = x^2 + y^2$ in $K = \mathbb{R}^2$. $H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow f$ konveksna $\Rightarrow \left\{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\right\}$ konveksna.

Dokaz. Naj bosta $x, y \in K$ poljubna. Definirajmo $h_{x,y}(\lambda) = f((1-\lambda)x + \lambda y)$ — slednja je gotovo definirana na $[0,1]$. Ker je K odprta, je $h_{x,y}$ definirana celo na $(-\delta_{x,y}, 1+\delta_{x,y})$ za nek δ (glej dokaz za kriterij 2. odvoda za $n = 1$) in slika v $\mathbb{R}$.

Zaradi odprtosti K torej vemo $\forall \lambda \in (-\delta_{x,y}, 1+\delta_{x,y}) : (1-\lambda)x + \lambda y \in K$.

Sedaj dokažimo f konveksna $\Leftrightarrow \forall x, y \in K : h_{x,y}$ konveksna:

($\Rightarrow$) Po predpostavki velja, da je f konveksna. Želimo dokazati, da je $h_{x,y}$ konveksna. Torej za poljuben $\lambda, \mu \in (-\delta_{x,y}, 1+\delta_{x,y})$:

$$\begin{aligned}
h_{x,y}((1-\tau)\lambda + \tau\mu) &= f((1-(1-\tau)\lambda - \tau\mu)x + ((1-\tau)\lambda + \tau\mu)y) = \\
&= f(x - (1-\tau)\lambda x - \tau\mu x + (1-\tau)\lambda y + \tau\mu y) = \\
&= f(x[1-(1-\tau)\lambda - \tau\mu] + y[(1-\tau)\lambda + \tau\mu]) = \\
&= f(x[1-\lambda+\tau\lambda-\tau\mu] + y[\lambda - \tau\lambda + \tau\mu]) = \\
&= f(x - x\lambda + \lambda y + \tau[\lambda x - \mu x - \lambda y + \mu y]) = \\
&= f((1-\lambda)x + \lambda y + \tau[\mu y - \mu x - \lambda y + \lambda x + x - x]) = \\
&= f((1-\lambda)x + \lambda y + \tau[[(1-\mu)x + \mu y] - [(1-\lambda)x + \lambda y]]) = \\
&= f([(1-\lambda)x + \lambda y] + \tau[(1-\mu)x + \mu y] - \tau[(1-\lambda)x + \lambda y]) = \\
&= f((1-\tau)((1-\lambda)x + \lambda y) + \tau((1-\mu)x + \mu y)) \overset{f \text{ konv.}}{\leq} \\
&\overset{f \text{ konv.}}{\leq} (1-\tau)f((1-\lambda)x + \lambda y) + \tau f((1-\mu)x + \mu y) = \\
&= (1-\tau)h_{x,y}(\lambda) + \tau h_{x,y}(\mu)
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Po predpostavki velja, da je $h_{x,y}$ konveksna. Dokažimo, da je f konveksna.

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = h_{x,y}(\lambda) = h_{x,y}((1-\lambda)\cdot 0 + \lambda \cdot 1) \overset{h_{x,y} \text{ konv.}}{\leq} (1-\lambda)h_{x,y}(0) + \lambda h_{x,y}(1) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Sedaj odvajajmo $h_{x,y}$ — spomnimo se verižnega pravila (pozor, tu je malce grda notacija: x_i' pomeni $i-$to spremenljivko f , x_i pa $i-$to komponento $x-$a):

$$\begin{aligned}
h_{x,y}'(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} f((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, \ldots, (1-\lambda)x_n + \lambda y_n) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1'}((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1)\cdot(y_1 - x_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n'}((1-\lambda)x_n + \lambda y_n)\cdot(y_n - x_n) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i'}((1-\lambda)x_i + \lambda y_i)\cdot(y_i - x_i)
\end{aligned}$$

Sedaj odvajajmo $h_{x,y}$ dvakrat — spet uporabimo verižno pravilo (spet grda notacija):

$$h''_{x,y}(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x'_i \partial x'_j} \left((1-\lambda) x_i + \lambda y_i \right) \cdot (y_i - x_i)(y_j - x_j) = \cdots$$

... kar smo dobili, je ravno kvadratna forma: ...

$$\cdots = (y-x)^T H_f \left((1-\lambda) x + \lambda y \right)(y-x)$$

Torej doslej vemo, da je f konveksna $\Leftrightarrow \forall x, y \in K : h_{x,y}$ konveksna, torej lahko na njej uporabimo pravilo drugega odvoda in dobimo

$$\forall x, y \in K, \lambda \in (-\delta_{x,y}, 1+\delta_{x,y}) : h''_{x,y}(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x, y \in K, \lambda \in (-\delta_{x,y}, 1+\delta_{x,y}) : (y-x)^T H_f \left((1-\lambda) x + \lambda y \right)(y-x) \geq 0$$

Sedaj moramo dokazati le še

$$\forall x, y \in K, \lambda \in (-\delta_{x,y}, 1+\delta_{x,y}) : (y-x)^T H_f \left((1-\lambda) x + \lambda y \right)(y-x) \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in K, x \geq 0 : H_f(x) \geq 0$$

Torej dokazujemo ekvivalenco:

$(\Leftarrow)$: Očitno, po definiciji pozitivne semidefinitnosti.

$(\Rightarrow)$: Fiksirajmo x. Vzemimo $\lambda = 0$. Po predpostavki velja

$$(y-x)^T H_f \left((1-\lambda) x + \lambda y \right)(y-x) \geq 0$$
$$(y-x)^T H_f(x)(y-x) \geq 0$$

Ker je K odprta, $\exists \varepsilon > 0 \ni: ||x-y|| < \varepsilon \Rightarrow y \in K$. Vzemimo poljuben $z \in \mathbb{R}^n$ in $m \in \mathbb{R}$ tak, da $\left|\left|\frac{z}{m}\right|\right| < \varepsilon$. To je gotovo res za nek dovolj velik m. Za $y = x + \frac{z}{m}$ torej velja, da je v K:

$$(y-x)^T H_f(x)(y-x) \geq 0$$
$$\left(x + \frac{z}{m} - x\right)^T H_f(x) \left(x + \frac{z}{m} - x\right) \geq 0$$
$$\left(\frac{z}{m}\right)^T H_f(x) \left(\frac{z}{m}\right) \geq 0$$
$$\frac{z^T}{m} H_f(x) \frac{z}{m} \geq 0 \qquad / \cdot \left(m^2\right)$$
$$z^2 H_f(x) z \geq 0 \qquad / \cdot \left(m^2\right)$$

Torej je H_f res pozitivno semidefinitna.

$\square$

8.2 Konveksne funkcije in optimizacija

Definicija. Naj bo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ za $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

- f ima globalni $\overset{\min}{\max}$ v $x^* \in \Omega \Leftrightarrow \forall x \in \Omega : f(x) \overset{\geq}{\leq} f(x^*)$.
- f ima lokalni $\overset{\min}{\max}$ v $x^* \Omega \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in \Omega : ||x - x^*|| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \overset{\geq}{\leq} f(x^*)$.

Izrek. *Naj bo $f : K^{konv.} \to \mathbb{R}$ konveksna. Če ima f v x^* lokalni minimum, ima v x^* tudi globalni minimum.*

Dokaz. Če x^* ni globalni minimum, $\exists y \in K \ni: f(y) < f(x^*)$. Vzemimo poljuben $\lambda \in [0,1]$.

$$f((1-\lambda)x^* + \lambda y) \overset{f \text{ konv.}}{\leq} (1-\lambda) f(x^*) + \lambda \overset{<f(x^*)}{f(y)} < (1-\lambda) f(x^*) + \lambda f(x^*) = f(x^*)$$

Torej prišli smo do

$$f((1-\lambda)x^* + \lambda y) < f(x^*)$$

Sedaj vzemimo razdaljo med $(1-\lambda)x^* + \lambda y$ in x^*:

$$||(1-\lambda)x^* + \lambda y - x^*|| = ||\lambda y - \lambda x^*|| = \lambda ||y - x^*||$$

Za $\lambda > 0 \wedge \lambda < \frac{\varepsilon}{||y-x^*||}$ je $\lambda ||y - x^*|| < \varepsilon$ in zato po predpostavki o lokalnem minimumu

$$f((1-\lambda)x^* + \lambda y) \geq f(x^*),$$

kar je v protislovju z $f((1-\lambda)x^* + \lambda y) < f(x^*)$. Torej je x^* globalni minimum. □

Pripomba. Konveksna funkcija seveda nima nujno lokalnega ali globalnega minimuma, a velja, da če ima lokalni minimum, je to tudi globalni minimum. Za maksimume to ne velja, recimo funkcija

$$f : [0,3] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \leqslant 1; & 2(1-x) \\ x \in (1,2); & 0 \\ x \geq 2 & x-2 \end{cases}$$

je konveksna in ima lokalna minimuma v $x = 0$ in v $x = 3$, toda $f(0) = 2$, a $f(3) = 1$.

Izrek. *$f : K \to \mathbb{R}, K$ konveksna in odprta. Naj bo $\forall x : H_f(x) > 0$. Tedaj je f strogo konveksna.*

Dokaz. Ne bomo dokazali. □

Pripomba. „f strogo konveksna $\Rightarrow H_f(x) > 0$“ pa ne velja vedno. Protiprimer je $f(x) = x^4$. Njegova hessejeva matrika je $\left[12x^2\right]$ in $\left[12x^2\right](0) = 0$, toda f je strogo konveksna.

Izrek. *Naj bo $f : K^{konv.} \to \mathbb{R}$ strogo konveksna in naj ima v x^* globalni maksimum. Tedaj je v x^* ekstremna točka (točka, ki je ni moč izraziti kot konveksno kombinacijo dveh drugih točk iz K).*

Dokaz. PDDRAA x^*ni ekstremna točka. Tedaj $\exists y, z \in K, y \neq x^*, z \neq x^*, \lambda \in [0,1] \ni: x^* = (1-\lambda)y + \lambda z$. Potemtakem po strogi konveksnosti f velja

$$f(x^*) = f((1-\lambda)y + \lambda z) < (1-\lambda) \overset{\leq 0}{f(y)} + \lambda \overset{\leq 0}{f(z)} \leq f(x^*)$$

In seveda je $f(x^*) < f(x^*)$ protislovje. □

8.3 Vezani ekstrem z neenakostmi — VEN

Imejmo $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, in $\forall i \in [m] : g_i : \Omega \to \mathbb{R}$, ki določajo $D \coloneqq \{x \in \Omega \ni: \forall i \in [m] : g_i(x) \leq 0\}$. Iščemo $\max / \min$ f na D.

Zgled. Imejmo $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ med krivuljama $y = x^2$ in $y = 4$. Iščemo njen max in min.

Torej območje določata $g_1(x,y) = y - 4$ in $g_2(x,y) = x^2 - y$.

Notranjost območja: V lokalnem ekstremu velja, da sta parcialna odvoda po x in y oba enaka 0, torej $f_x = f_y = 0$. Dobimo sistem enačb:

$$2y - 2x = 0 \implies y = x$$

$$6x^2 + 8x - 2y = 0 \implies 6x^2 + 8x - 2x = 0 \implies 6x^2 + 6x = 0 \implies 6x(x+1) = 0 \implies x \in \{0, -1\}$$

Kandidata za ekstrem v notranjosti sta $(0,0)$ in $(-1,-1)$. Ali sploh sta v notranjosti območja? $g_2(0,0) = 0$, $g_1(-1,-1) = 0$ — to ni notranjost, to je rob. V notranjosti sploh ni kandidatov za ekstrem.

Kandidati za rob: Ločimo dva roba — funkciji ene spremenljivke in parametriziramo f na tem robu s funkcijama ene spremenljivke:

- $y = 4$: $h_1(x) = f(x,4) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$ na $[-2,2]$ (to najdemo tako, da izračunamo presečišči g_1 in g_2).

$$h_1'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 2\left(3x^2 + 4x - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{26} = \frac{-4 \pm 8}{6} \Leftrightarrow x \in \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}$$

  Torej ekstrem v notranjosti definicijskega območja: $h_1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{352}{27}$. Še robovi definicijskega območja: $h_1(2) = 32$, $h_1(-2) = 32$.

- $y = x^2$: $h_2(x) = f\left(x, x^2\right) = \cancel{2x^3} + 4x^2 + x^4 \cancel{- 2x^3} = x^4 + 4x^2$ na $[-2,2]$.

$$h_2'(x) = 4x^3 + 8x = 4x\left(x^2 + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

  Torej ekstrem v notranjosti definicijskega območja: $h_2(0) = 0$. Robovi so pa isti kot pri h_1.

- Torej globalni maksimum je dosežen v $(-2,4)$ in v $(2,4)$ in ima vrednost 32, globalni minimum pa v $(0,0)$ in ima vrednost 0.

Drugi način reševanja: Lagrangevi množitelji.

$$L(x,y,\lambda,\mu) \coloneqq 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy + \lambda(y-4) + \mu\left(x^2 - y\right)$$

Kandidati za ekstrem so v točkah, kjer velja $L_x = 0$, $L_y = 0$, $\lambda(y-4) = 0$, $\mu\left(x^2 - y\right) = 0$, $y - 4 \leq 0$ in $x^2 - y \leq 0$.

Razlaga: $\lambda = 0, \mu = 0$: notranjost, $\lambda \neq 0, \mu = 0$: zgornji rob, $\lambda = 0, \mu = 0$: spodnji rob, $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$: presečišči.

Dobimo sistem štirih enačb s štirimi neznankami:

$$L_x = 6x^2 + 8x - 2y + 2\mu x = 0$$
$$L_y = 2y - 2x + \lambda - \mu = 0$$
$$\lambda(y-4) = 0$$
$$\mu\left(x^2 - y\right) = 0$$

Dobimo kandidate za ekstrem in izračunamo funkcijo v njih, da ugotovimo, kateri je resničen ekstrem.

8.4 Karush-Kuhn-Tuckerjevi pogoji (KKT) za reševanje VEN:

Naloga je $\max / \min\ f(x)$ p. p. $x \in \Omega$ in $g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0$.

Definiramo Lagrangevo funkcijo $L(x,\lambda)$ (x je n spremenljivk, λ je m spremenljivk) takole:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

KKT pogoji so $\forall i \in [n] : L_{x_i} = 0$ in $\forall j \in [m] : \lambda_j g_j = 0 \wedge g_j \leq 0 \wedge \lambda_j \geq 0$ (nenegativnost λ ni pogoj pri reševanju VEN z Lagrangevimi množitelji).

Vprašanje. *Kako rešujemo VEN? Zapišemo KKT pogoje. Ločimo $\forall j$ možnosti (2^m možnosti):*

- $\lambda_j = 0$ *in*
- $\lambda_j \neq 0$.

Torej npr. za $m = 2$ ločimo $\lambda = 0, \mu = 0$, $\lambda > 0, \mu = 0$, $\lambda = 0, \mu > 0$, $\lambda > 0, \mu > 0$.

Pripomba. V splošnem KKT pogoji niso le potrebni ne zadostni za to, da je x^*, ki ustreza KKT pogojem globalni/lokalni ekstrem.

Zgled. Več primerov:

1. $\min x^2 - y^2$ p. p. $x \geq 0, y \geq 0$ za $\Omega = \mathbb{R}^2$. Torej $L = x^2 - y^2 + \lambda(-x) + \mu(-y)$.

   KKT pogoji: $L_x = 2x - \lambda = 0$, $L_y = -2y - \mu = 0$, $\lambda(-x) = 0$, $\mu(-y) = 0$, $-x \leq 0$, $-y \leq 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$. Ustrezna rešitev tega sistema KKT pogojev je $x = y = \lambda = \mu = 0$, toda 0 ni niti lokalni niti globalni minimum. Torej KKT pogoji niso vedno zadostni.

2. $\min x$ p. p. $0 \leq y \leq x^3$ za $\Omega = \mathbb{R}^2$. Očitno je $(0,0)$ globalni minimum. $L = x + \lambda(-y) + \mu\left(y - x^3\right)$.

   KKT pogoji: $L_x = 1 - 3\mu x^2 = 0$, $L_y = -\lambda + \mu = 0$, $\lambda(-y) = 0$, $\mu\left(y - x^3\right) = 0$, $-y \leq 0$, $y - x^3 \leq 0$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$.

   Najdimo vse rešitve KKT pogojev: $\lambda = \mu$. Ločimo primere:

   - $\lambda \neq 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow y = x^3 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow 1 - 3\mu x^2 \neq 0$
   - $\lambda = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow 1 - 3\mu x^2 = 1 \neq 0$

   Torej KKT nima nobene rešitve, pa če prav funkcija ima minimum.

Izrek. *Trdimo dve stvari:*

1. *Ω odprta in konveksna, $f, g_1, \ldots, g_m : \Omega \to \mathbb{R}$ konveksne in odvedljive. Če x^* ustreza KKT pogojem, je globalni minimum (oz. rešitev problema VEN) — zadostnost pogojev KKT.*
2. *Ω odprta in $f, g_1, \ldots, g_m : \Omega \to \mathbb{R}$ odvedljive. Če velja, da je x^* lokalni minimuum in velja eden od pogojev*
   - *(a) $g_1, \ldots, g_m$ afine ali*
   - *(b) Ω konveksna, $f, g_1, \ldots, g_m$ konveksne, notranjost D ni prazna (D brez roba) ZDB $D^\circ \neq \emptyset$ ali*
   - *(c) množica vektorjev $\{\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)\}$ je linearno neodvisna,*

   potem veljajo KKT pogoji v x^* — potrebnost pogojev KKT.

Posledica. *Za konveksni problem, kjer velja $D^\circ \neq \emptyset$, so KKT pogoji ekvivalentni temu, da imamo globalni minimum. (($\Rightarrow$) točka 1, ($\Leftarrow$) točka 2b).*

Dokaz. Imamo dve trditvi:

1. Vemo, da so funkcije konveksne in odvedljive. Naj bo x^* globalni minimum. Naj bo x poljuben na D. Uporabimo preverjanje konveksnosti s prvim odvodom: $f(x) \geq f(x^*) + (x - x^*)\nabla f(x^*)$ (sledi iz konveksnosti f). Ker so g_j tudi konveksne, velja $\forall j \in [m] : g_j(x) \geq g_j(x^*) + (x - x^*)\nabla g_j(x^*)$. Vsako neenakost za g_j pomnožimo z λ_j (je nenegativen — KKT pogoj) in vse neenakosti seštejemo:

$$f(x) \geq f(x^*) + (x - x^*)\nabla f(x^*)$$

$$\forall j \in [m] : g_j(x) \geq g_j(x^*) + (x - x^*)\nabla g_j(x^*) \qquad / \cdot \lambda_j$$

$$\forall j \in [m] : \lambda_j g_j(x) \geq \lambda_j g_j(x^*) + \lambda_j (x - x^*)\nabla g_j(x^*)$$

$$f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) \geq f(x^*) + \overbrace{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x^*)}^{=0,\text{ ker } x^* \text{ zadošča KKT}} + (x - x^*)\left(\overbrace{\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*)}^{=\nabla L(x^*)=0,\text{ ker } x^* \text{ zadošča KKT}}\right)$$

$$f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) \geq f(x^*)$$

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \overset{\geq 0}{\lambda_j}\left(\overset{\geq 0}{-g_j(x)}\right) \geq f(x^*)$$

2. Ne bomo dokazali (dokaz vključuje Farkasevo lemo)

□

Zgled. Oglejmo si spet primer od prej, kjer imamo globalni minimum, a ne izpolnjuje KKT pogojev; $\min x$ p. p. $0 \leq y \leq x^3$.

$$g_1(x,y) = -y$$

$$g_2(x,y) = -y - x^3$$

Preverimo pogoje iz prejšnjega izreka:

- 2a: g_2 ni afina — ne ustreza pogoju

- 2b: Ω ni konveksna — ne ustreza pogoju
- 2c: $\nabla g_1(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\nabla g_2(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nista linearno neodvisna — ne ustreza pogoju

Noben od teh pogojev ni izpolnjen. Lahko imamo minimum, ki ne ustreza KKT pogojem.

Zgled. min $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ p. p. $x>0, y>0, x+y \leq 5, 3x^2+2y^2 \leq 35$. Prva dva pogoja definirata $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x>0, y>0\right\}$ (prvi kvadrant brez osi). Druga dva pogoja definirata $g_1(x,y) = x+y-5$, $g_2(x,y) = 3x^2+2y^2-35$.

Ali je Ω konveksna? Da. Ali so vse funkcije konveksne? Uporabimo Hessejevo matriko:

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{y^3} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{ker } \frac{2}{x^3} \text{ in } \frac{4}{y^3} > 0). \text{ Je celo strogo konveksna.}$$

g_1 je afina, torej konveksna.

$$H_{g_2} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ Je celo strogo konveksna.}$$

Imamo konveksne funkcije, se pravi lahko uporabimo KKT pogoje.

$$L = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \lambda(x+y-5) + \mu\left(3x^2+2y^2-35\right)$$

$$L_x = -\frac{1}{x^2} + \lambda + 6\mu = 0$$
$$L_y = -\frac{2}{y^2} + \lambda + 4\mu = 0$$
$$\lambda(x+y-5) = 0$$
$$\mu\left(3x^2+2y^2-35\right) = 0$$
$$x+y-5 \leq 0$$
$$3x^2+2y^2-35 \leq 0$$

Lotimo se posameznih primerov:

1. $\lambda = \mu = 0$: $-1\frac{1}{x^2} = 0$ nemogoč
2. $\lambda > 0, \mu = 0$: $-\frac{1}{x^2}+\lambda = 0$, $-\frac{2}{y^2}+\lambda = 0$, $x+y-5=0$. Torej $\lambda = \frac{1}{x^2} = \frac{2}{y^2}$, torej $y^2 = 2x^2$. A hkrati $y = \pm\sqrt{2}x$, $y = \sqrt{2}x$ (ker je pozitiven) in ker $x+y=5$, velja $x+\sqrt{2}x = 5 \sim x\left(1+\sqrt{2}\right) = 5 \sim x = \frac{5}{1+\sqrt{2}} = \frac{5\left(\sqrt{2}-1\right)}{1} = 5\left(\sqrt{2}-1\right)$ in zato $y = \sqrt{2}\cdot 5\left(\sqrt{2}-1\right) = 5\left(2-\sqrt{2}\right)$. Nadalje $\lambda = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{25\left(3-2\sqrt{2}\right)} = \frac{3+2\sqrt{2}}{25\cdot 1} \geq 0$. $\mu = 0$. Vsem enakostim je zadoščeno, še neenakost:

$$3x^2+2y^2-35 \leq 0$$

$$3\left(25\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) + 2\left(25\left(6-4\sqrt{2}\right)\right) = 25\left(9-6\sqrt{2}+12-8\sqrt{2}\right) = 25\left(21-14\sqrt{2}\right) \leq 35$$

velja, torej so KKT pogoji izpolnjeni. Po izreku, če so KKT pogoji izpolnjeni, smo dobili globalni minimum. Možnosti 3 ($\lambda = 0, \mu > 0$) in 4 ($\lambda > 0, \mu > 0$) ni treba preverjati. Torej je globalni minimum v $x = 5\left(\sqrt{2}-1\right)$, $y = 5\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Kako pa se linearen program obnaša kot konveksen problem?

Standardni LP: P' je min $c^T x$ p. p. $Ax \leq b$, $x \geq 0$, njegov dual, P', je min $b^T y$ p. p. $A^T y \geq c$, $y \geq 0$.

Predstavimo P kot konveksen problem: na $\Omega = \mathbb{R}^n$: min $-c^T x$ p. p. $\forall i \in [m] : a^{(i)}x - b_i \leq 0$[2] in $\forall j \in [n] : -x_j \leq 0$.

[2]ZDB $i-$ta vrstica A, skalarno množena z x, ko ji odštejemo b_i, je manjša od 0.

$-c^T x$, $a^{(i)}x - b_i$, $-x_j$ so vse afine, torej tudi konveksne, se pravi ustrezajo zahtevam pogojem KKT za iskanje optimalne rešitve.

$$L = -c^T x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(a^{(i)}x - b_i\right) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(-x_j\right)$$

$$\forall k \in [n] : L_{x_k} = -c_k + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(a_{ik}\right) - \mu_k = 0$$

$$\forall i \in [m] : \lambda_i \left(a^{(i)}x - b_i\right) = 0 \quad \text{(I.)}$$

$$\forall i \in [n] : \mu_j \left(-x_j\right) = 0 \quad \text{(II.)}$$

$$\forall j \in [n] : \mu_j \left(-x_j\right) = 0$$

$$\forall i \in [m] : \lambda_i \geq 0, \quad \forall j \in [n] : \mu_j \geq 0$$

$$\forall i \in [n] : a^{(i)}x - b_i \leq 0$$

$$\forall j \in [m] : -x_j \leq 0$$

Opazimo $\forall k \in [n] : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(a_{ik}\right) - c_k \sim A^T \lambda - c = \mu$.

Torej: kdaj (x, λ, μ) ustrezajo KKT pogojem? Natanko tedaj, ko

- $Ax \leq b, x \geq 0$ — x dopusten za P
- $\mu \geq 0, \lambda \geq 0, A^T\lambda - c = \mu$, kar lahko drugače zapišemo $A^T\lambda \geq c, \lambda \geq 0$ — λ dopusten za P'
- Poleg tega mora še veljati
  - (I.) $\forall i \in [m] : \lambda_i = 0 \vee \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ in
  - (II.) $\forall j \in [n] : x_j = 0 \vee (\mu_j = 0 \sim \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(a_{ij}\right) = c_j)$ ($\mu_j = \cdots$ izrazimo iz enačbe $L_{x_k} = \cdots$)

  Torej da x in λ izpolnjujeta pogoje iz izreka o dualnem dopolnjevanju, ki pravi, da če imamo dopustno rešitev za problem in njegov dual, so DD pogoji izpolnjeni natanko tedaj, ko sta x in λ optimalna za P in P'.

Pridemo do tega, da če rešujemo linearen program preko pogojev KKT, imamo rešitev natanko tedaj, ko izpolnimo pogoje DD. Torej KKT je ekvivalenten DD.

9 Celoštevilsko linearno programiranje — CLP (angl. Integer linear programming — ILP)

Imamo linearni program $\max c^T x$ p. p. $Ax \leq b$, $x \geq 0$ z dodatno zahtevo $x \in \mathbb{Z}^n$. Če imamo samo zahtevo $x_i \in \mathbb{Z}$ za nekatere i, je to mešano (mixed) LP, torej MLP.

Izkaže se, da je to NP težek problem.

Vprašanje. *Kako rešujemo CLP?*

Lahko rešimo sproščen problem — odstranimo zahtevo $x \in \mathbb{Z}^n$, npr. s simpleksno metodo. Če je optimalna rešitev celoštevilska, je tudi optimalna rešitev za prvotni problem. Če ni celoštevilska, pa jo zaokrožimo, vendar to ni nujno optimalna rešitev — lahko niti ni dopustna.

Zgled. Nekaj primerov CLP:

1. Dihotomija: Imejmo $x \geq 0$, $y \geq 0$. Želimo dodati $x \geq a \wedge y \geq b$. To lahko pretvorimo v CLP tako, da dodamo $\delta \in [0,1], \delta \in \mathbb{Z}$ in dodamo pogoj $x \geq \delta \cdot a$ in $y \geq (1-\delta) \cdot b$.
2. Diskretna spremenljivka: Želimo $x \in \{s_1, \ldots, s_k\}$ kot pogoj. To lahko pretvorimo v CLP tako, da dodamo pogoje $x = s_1\delta_1 + \cdots + s_k\delta_k$ in $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \{0,1\}$ ter $\delta_1 + \cdots + \delta_k = 1$.
3. Imejmo $0 \leq x \leq u$ in kriterijsko funkcijo, ki ni linearna, recimo $f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x \in (0, u] \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$. To si lahko predstavljamo kot „Če hočemo gojiti korenje, moramo kupiti nov stroj, ki nas stane b. Če korenja ne gojimo, stroja ne potrebujemo.“. To lahko pretvorimo v CLP tako, da nastavimo kriterijsko funkcijo na $f(x) = ax + b\delta$ in dodamo pogoje $\delta \leq x \leq \delta u$ in $\delta \in \{0,1\}$.

4. SAT (satisfiability problem). Dan je logični izraz v spremenljivkah $x_1, \ldots, x_n$. Ali je za kak nabor vrednosti izraz resničen? Ta problem je NP poln. SAT lahko pretvorimo na CLP:

   Zapišemo ta izraz v KNO (konjunktivni normalni obliki — imamo konjunkcijo samih disjunkcij). Pokažimo na primeru: Zanima nas, ali obstaja rešitev za $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3})$. Pretvorimo v CLP:

   $\max 0$ p. p. $x_1 + x_2 + x_2 \geq 1$, $x_1 + (1 - x_2) \geq 1$, $x_2 + (1 - x_3) \geq 1$, $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$.

5. Potujoči trgovec (NP-težek): Imejmo utežen graf, naj bo c_{ij} cena od i do j. Radi bi našli najcenejši Hamiltonov cikel. Uvedemo $x_{ij} \in \{0, 1\}$, kjer x_{ij} pomeni, da gre trgovec iz $i-$tega v $j-$to mesto.

   $\min \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ p. p. $\forall i \in [n] : \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$, $\forall j \in [n] : \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$ in da preprečimo, da trgovec naredi več disjunktnih ciklov: $\forall S \subseteq [n], S \neq \emptyset, S \neq [n] : \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1$ — v nekem koraku moramo iz vsake podmnožice vozlišč (mest) preiti v njen komplement. Žal s tem dodamo eksponentno mnogo neenačb. Temu se sicer lahko izognemo.

9.1 Razveji in omeji (angl. branch and bound)

Je ena možna metoda za reševanje CLP. Ilustriramo na primeru $0, 1-$nahrbtnika.

Imamo nahrbtnik s kapaciteto V. Imamo n predmetov z volumni $v_1, \ldots, v_n$ in cenami $c_1, \ldots, c_n$. V nahrbtnik želimo dati predmete s čim večjo ceno.

- Če dovolimo rezanje predmetov: x_i predstavlja, kakšen delež predmeta i damo v nahrbtnik.

  $\max c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ p. p. $v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n \leq V$, $\forall i \in [n] : 0 \leq x_i \leq 1$.

  Rešitev: Predmete razvrstimo glede na razmerje cena/volumen. BSŠ $\forall i \in [n-1] : \frac{c_i}{v_i} \leq \frac{c_{i+1}}{v_{i+1}}$. Dokler gre, dajemo cel predmet v nahrbtnik. Ko naposled ostane dovolj volumna le še za delež predmeta, damo toliko predmeta, kolikor gre, v nahrbtnik ostalo pa pustimo izven nahrbtnika. Rešitev bo torej oblike

  $$\left(1, \ldots, 1, \alpha = \frac{v - v_1 - \cdots - v_{k-1}}{v_k}, 0, \ldots, 0\right)$$

  Dokaz preko ŠID. Primalni problem nahrbtnika:

  $$\begin{array}{lcccl}
  \max & c_1 x_1 & + \cdots + & c_n x_n & \\
  \text{p. p.} & v_1 x_1 & + \cdots + & v_n x_n & \leq V \\
  & x_1 & & & \leq 1 \\
  & & \vdots & & \vdots \\
  & & & x_n & \leq 1 \\
  & x_1, & \ldots, & x_n & \geq 0
  \end{array}$$

  Njegov dual:

  $$\begin{array}{lccccl}
  \min & V y_0 & + y_1 & + \cdots + & y_n & \\
  \text{p. p.} & v_1 y_0 & + y_1 & & & \geq c_1 \\
  & v_2 y_0 & + y_2 & & & \geq c_2 \\
  & & & \vdots & & \\
  & v_n y_0 & + y_n & & & \geq c_n \\
  & y_0, & y_1, & \cdots, & y_n & \geq 0
  \end{array}$$

  Rešitev primala je $\forall i \in [k-1] : x_i^* = 1$, $x_k^* = \alpha$, $\forall i \in \{k+1..n\} : x_i^* = 0$. Je dopustna. Očitno.

  Rešitev duala je (račun izpuščen): $y_0 = \frac{c_k}{v_k}$, $\forall i \in [k-1] : y_i^* = c_i - v_i \frac{c_k}{v_k}$, $\forall i \in \{k..n\} : y_i^* = 0$. Je dopustna, ker $c_i - v_i \frac{c_k}{v_k} \geq 0 \sim \frac{c_i}{v_i} \geq \frac{c_k}{v_k}$ velja, ker so predmeti razvrščeni po gostoti cene. Kaj pa pogoji $v_i y_0 + y_i \geq c_i$? Za $i \in [k-1]$ je $v_i y_0 + y_i = \cancel{v_i \frac{c_k}{v_k}} + c_i - \cancel{v_i \frac{c_k}{v_k}} = c_i \geq 0$, za $i \in \{k..n\}$ je $v_i y_0 + y_i = v_i \frac{c_k}{v_k} \geq 0$ in to je res dopustno za dual problema nahrbtnika.

  Sedaj moramo preveriti še enakost vrednosti kriterijske funkcije:

  Za primal:

  $$c_1 x_y^* + \cdots + c_n x_n^* = c_1 + \cdots + c_{k-1} + c_k \frac{v - v_1 - \cdots - v_{k-1}}{v_k}$$

Za dual:

$$Vy_0^* + y_1^* + \cdots + y_n^* = V\frac{c_k}{v_k} + c_1 - v_1\frac{c_k}{v_k} + \cdots + c_{k-1} - v_{k-1}\frac{c_{k-1}}{v_{k-1}}$$

To je res enako in po ŠID sta torej to optimalni rešitvi.

- Če predmetov ne smemo rezati: Poiščemo rešitev sproščenega problema in dobimo $(1, \ldots, 1, \alpha, 0, \ldots, 0)$. $k-$ta spremenljivka je sedaj α, kar ni nujno $\in \{0, 1\}$. Razvejimo:
  - $x_k = 0$ ... isto, kot če tega predmeta nimamo na voljo. Rešimo isti problem brez tega predmeta.
  - $x_k = 1$ ... rešimo isti problem brez tega predmeta z zmanjšanjem volumna. — ta predmet vzamemo.

Zgled. Imamo 6 predmetov. Prostornine: 10, 50, 100, 45, 5, 20. Cene: 10, 35, 40, 18, 2, 4. Kapaciteta nahrbtnika je 100.

- Razmerja med cenami in volumni: 1; 0,7; 0,4; 0,4; 0,4; 0,2. Rešitev sproščenega problema je $\left(1, 1, \frac{2}{5}, 0, 0, 0\right)$. Cena je 61. To ni končna rešitev, ker ni celoštevilska. Razvejimo:
  - $x_3 = 1$: $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ s ceno 40. Razvejitev ni potrebna, ker je rešitev celoštevilska.
  - $x_3 = 0$: $\left(1, 1, 0, \frac{8}{9}, 0, 0\right)$ s ceno 61
    - $x_4 = 0$: $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$ s ceno 51
    - $x_4 = 1$: $\left(1, \frac{9}{10}, 0, 1, 0, 0\right)$ s ceno $59,5$
      - $x_2 = 0$: $(1, 0, 0, 1, 1, 1)$ s ceno 34
      - $x_2 = 1$: $\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 1, 0, 0\right)$ s ceno 58. Razvejimo $x_1 = 0$: $(0, 1, 0, 1, 1, 0)$ s ceno 55, $x_1 = 1$: $(1, 1, 0, 1x, x)$ preveč kapacitete zasedene, ni možne rešitve

- To pomeni, da je optimalna vrednost CLP 55 z rešitvijo $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$.
- Namesto $2^6 = 64$ smo preučili samo 9 možnosti.
- Kdaj ne razvejimo več (omejimo)?
  - Ko je rešitev sproščenega problema, ki jo dobimo, celoštevilska.
  - Ko je kapaciteta presežena.
  - Ko dobimo rešitev sproščenega problema, ki je slabša od doslej najdene najboljše rešitve CLP.

Zgled. Še en primer razveji in omeji na splošnem ILP: $\max 7x_1 + 9x_2$ p. p. $-x_1 + 3x_2 \leq 6$, $7x_1 + x_2 \leq 35$, $x_1, x_2 \geq 0$ in $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Najprej rešimo sproščeni problem: V tem primeru je rešitev $x_1^* = \frac{9}{2}$, $x_2^* = \frac{3}{2}$. Če bi bila ta rešitev celoštevilska, bi končali. Toda ni, razvejimo: $x_i \leq \lfloor \alpha \rfloor$ ali $x_i \geq \lceil \alpha \rceil$. Torej razvejimo $\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{5}\right)$ z vrednostjo 63:

- $x_1 \leq 4$: $\left(4, \frac{10}{3}\right)$ z vrednostjo 58
  - $x_2 \leq 3$: $(4, 3)$ z vrednostjo 55 — omejimo, celoštevilska rešitev
  - $x_2 \geq 4$: dobimo nedopusten primer
- $x_1 \geq 5$: $(5, 0)$ z vrednostjo 35.

Optimalna rešitev CLP je $x^* = (4, 3)$ z vrednostjo 55.